[東京工業大学 2018 年前期 $\boxed{1}$]

$a,\ b,\ c$ を実数とし，３つの２次方程式

$$x^2+ax+1=0\ \cdots\cdots①,\quad x^2+bx+2=0\ \cdots\cdots②,\quad x^2+cx+3=0\ \cdots\cdots③$$

の解を複素数平面上で考察する。

(1) ２つの方程式①, ②がいずれも実数解を持たないとき, それらの解はすべて同一円周上にあるか, またはすべて同一直線上にあることを示せ。また，それらの解がすべて同一円周上にあるとき，その円の中心と半径を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) ３つの方程式①，②，③がいずれも実数解を持たず，かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を $a,\ b,\ c$ を用いて表せ。

$x^2+ax+1=0\ \cdots①,\quad x^2+bx+2=0\ \cdots②,\quad x^2+cx+3=0\ \cdots③$ とする。

(1) ①を解くと $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$，②を解くと $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-8}}{2}$

実数係数の２次方程式が実数解をもたないとき，２つの解は共役な複素数になる。

共役な複素数は複素数平面上では，実軸に関して対称な２点になる。

①の解と②の解の実部が等しいとき，それら４解が表す複素数は，複素数平面上で同一直線上にある。

①の解と②の解の実部が異なる，すなわち $-\dfrac{a}{2}\neq-\dfrac{b}{2}\quad\Leftrightarrow\quad a\neq b$ のときは,

４解が表す複素数は，複素数平面上で等脚台形の４頂点となる。

よって，題意を満たす。

また，①の解を $\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係より $\alpha+\overline{\alpha}=-a$，$\alpha\overline{\alpha}=1$ であり,

実数 t に対し，t と α の距離の２乗は

$$|t-\alpha|^2=(t-\alpha)(t-\overline{\alpha})=t^2-(\alpha+\overline{\alpha})t+\alpha\overline{\alpha}=t^2+at+1$$

となる。

②のついても同様に考え，①と②の４解が t を中心とする円の上にあるとき

$t^2+at+1=t^2+bt+2$ より $\quad t=\dfrac{1}{a-b}$

このときの半径は

$$\sqrt{t^2+at+1}=\sqrt{\frac{1+a(a-b)+(a-b)^2}{(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{2a^2+b^2-3ab+1}}{|a-b|}$$

(2) ①，②，③がいずれも実数解をもたないとき，判別式より

$a^2-4<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2<a<2$

$b^2-8<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$

$c^2-12<0 \quad \Leftrightarrow \quad -2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$

である。また，②，③の解が実数uを中心とする円の上にあるとき

$u^2+bu+2=u^2+cu+3$ より $u=\dfrac{1}{b-c}$

(1)のtとuが等しいとき，６つの解が複素数平面上で同一円上にあるので

$t=u \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{a-b}=\dfrac{1}{b-c}$ より $a+c=2b$

よって，求める条件は

a, b, cは相異なる実数であり，$a+c=2b$ かつ

$-2<a<2$ かつ $-2\sqrt{2}<b<2\sqrt{2}$ かつ $-2\sqrt{3}<c<2\sqrt{3}$