[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

次の条件（ⅰ）（ⅱ）をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

（ⅰ）N の正の約数は12個

（ⅱ）N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は12。

ただし，N の約数には1と N も含める。

☆ ☆

N が素因数分解により　$p^a q^b r^c \cdots$（$p, q, r, \cdots$ は異なる素数，$a, b, c, \cdots$ は正の整数）と表されるものとする。$12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 3$ であるから，条件(ⅰ)により N は

$N = p^{11}$，pq^5，p^2q^3，pqr^2

という形をしている。

また，条件(ⅱ)により12は N の約数であり，12の約数も N の約数になることから

$1, 2, 3, 4, 6, 12$ の 6 個も N の約数である。

従って，12が小さい方から並べて N の 7 番目の約数になるとき

$5, 7, 8, 9, 10, 11$ のいずれか1つが N の約数となっていることになる。

ここで，N の約数を小さいものから順に　$d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{12}$　とする。

約数の対称性から　$N = d_6 d_7$　であり，条件(ⅱ)から　$d_7 = 12$

ここで，d_6 について　$6 \leqq d_6 < d_7 = 12$　であるから，$d_6 = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ について調べる。

① $d_6 = 6$ のとき　$N = 6\cdot 12 = 72 = 3^2\cdot 2^3$　となるが，8 と 9 が N の約数となり，不適。

② $d_6 = 7$ のとき　$N = 7\cdot 12 = 84 = 3\cdot 7\cdot 2^2$　となり，適する。

③ $d_6 = 8$ のとき　$N = 8\cdot 12 = 96 = 3\cdot 2^5$　となり，適する。

④ $d_6 = 9$ のとき　$N = 9\cdot 12 = 108 = 2^2\cdot 3^3$　となり，適する。

⑤ $d_6 = 10$ のとき　$N = 10\cdot 12 = 120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$　となり，適さない。

⑥ $d_6 = 11$ のとき　$N = 11\cdot 12 = 132 = 3\cdot 11\cdot 2^2$　となり，適する。

以上①～⑥より，求める N の値は　84,　96,　108,　132

[別解]

N が素因数分解により $p^a q^b r^c \cdots$（$p, q, r, \cdots$ は異なる素数，$a, b, c, \cdots$ は正の整数）と表されるものとする。

$12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 3$ であるから，条件(ｉ)により N は

$N = p^{11}$，pq^5，p^2q^3，pqr^2　…（＊）

という形をしている。

また，条件(ⅱ)により 12 は N の約数であり，12 の約数も N の約数になることから

$1, 2, 3, 4, 6, 12$ の 6 個も N の約数である。

従って，12 が小さい方から並べて N の 7 番目の約数になるとき

$5, 7, 8, 9, 10, 11$ のいずれか 1 つが N の約数となっていることになる。

① 5 が N の約数となるとき

2 が N の約数であることから 10 も N の約数になり，不適。

② 7 が N の約数となるとき

N は $12\cdot 7 = 2^2\cdot 3\cdot 7$ の倍数となるが，（＊）より $N = 2^2\cdot 3\cdot 7 = 84$ が適する。

③ 8 が N の約数となるとき

N は $2^3\cdot 3$ の倍数となるが，（＊）より

pq^5 において $p = 3,\ q = 2$ として得られるのは $3\cdot 2^5 = 96$　これは適する。

p^2q^3 において $p = 3,\ q = 2$ として得られるのは $3^2\cdot 2^3 = 72$　これは 9 も約数となり不適。

④ 9 が N の約数となるとき

N は $2^2\cdot 3^2$ の倍数となるが，（＊）より

p^2q^3 において $p = 2,\ q = 3$ として得られるのは $2^2\cdot 3^3 = 108$　これは適する。

p^2q^3 において $p = 3,\ q = 2$ として得られるのは $3^2\cdot 2^3 = 72$　これは 8 も約数となり不適。

⑤ 10 が N の約数となるとき

5 も N の約数になり，不適。

⑥ 11 が N の約数となるとき

N は $2^2\cdot 3\cdot 11$ の倍数となるが，（＊）より $N = 2^2\cdot 3\cdot 11 = 132$ が適する。

以上①～⑥より，求める N の値は $84,\ 96,\ 108,\ 132$

[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

実数 x の関数 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ。

☆ ☆

$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ において，$g(t)=\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$ とおくと $g(t+\pi)=g(t)$ である。

また，$\alpha=\frac{\pi}{2}$ とすると

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\alpha}g(t)\,dt=\int_x^{x+\alpha}g(t+\pi)\,dt=\int_x^{x+\alpha}g(t)\,dt=f(x)$$

であるから，$f(x)$ の周期は π である。

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ における最大値，最小値を求める。

（ｉ）$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin t\geqq 0$ （$x\leqq t\leqq x+\alpha$）であるから

$f(x)=\int_x^{x+\alpha}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$ であり，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\sin(x+\alpha)}{1+\sin^2(x+\alpha)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\\
&=\frac{\cos x+\sin^2 x\cos x-\sin x-\sin x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\\
&=\frac{(\cos x-\sin x)-\sin x\cos x(\cos x-\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\\
&=\frac{(\cos x-\sin x)(1-\sin x\cos x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}
\end{aligned}$$

ここで，$1-\sin x\cos x>0$ であるから，$f'(x)$ の正負は

$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$ の正負と一致する。

（ⅱ）$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$x+\alpha \geqq \pi$ であるから

$$f(x)=\int_x^{x+\alpha} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt+\int_{\pi}^{x+\alpha} \frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}+\frac{-\sin(x+\alpha)}{1+\sin^2(x+\alpha)}$$

$$=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\cos x(1+\sin^2 x)+\sin x(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=-\frac{\cos x+\sin^2 x\cos x+\sin x+\sin x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=-\frac{(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=-\frac{(\cos x+\sin x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

ここで，$1+\sin x\cos x>0$ であるから，$f'(x)$ の正負は

$-(\cos x+\sin x)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の正負と一致する。

（ⅰ)(ⅱ)より $0\leqq x\leqq \pi$ における $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		＋	0	－	－	－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

周期性より $f(0)=f(\pi)$ であるから，

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値をとり，$x=\dfrac{3}{4}\pi$ で最小値をとる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{2-\cos^2 t}dt$$

ここで，$\cos t=u$ と置換すると

$-\sin t dt=du$，$t:\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{3}{4}\pi$ のとき $u:\dfrac{1}{\sqrt{2}}\to-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-du}{2-u^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{2-u^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{\left(\sqrt{2}+u\right)\left(\sqrt{2}-u\right)}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}-\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$$

また,

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-du}{2-u^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\log 3\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log 3\right\}$$

[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{3}$]

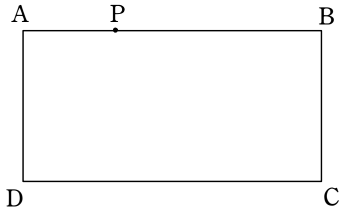
☆―――☆

aを1以上の実数とする。図のような長方形の折り紙ABCDが机の上に置かれている。

ただし，$\mathrm{AD}=1,\ \mathrm{AB}=a$である。Pを辺AB上の点とし，$\mathrm{AP}=x$とする。

頂点Dを持ち上げてPと一致するように折り紙を一回折った

とき，もとの長方形ABCDからはみ出る部分の面積をSとする。



(1) Sをaとxで表せ。

(2) $a=1$とする。PがAからBまで動くとき，Sを最大にするようなxの値を求めよ。

なお配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない。）

☆―――☆

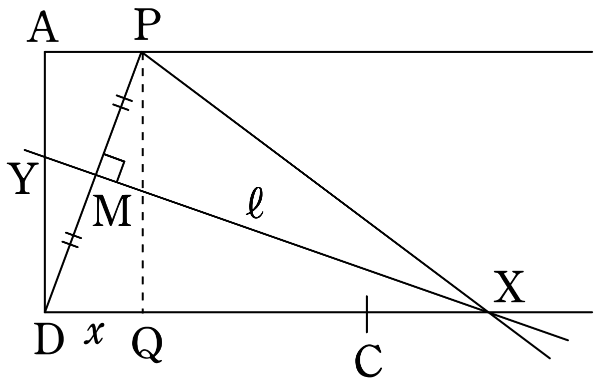
(1) $x=0$のとき，$S=0$ である。

$x>0$とする。

折り目となる直線はDPの垂直二等分線であり，これをℓとする。

さらに，ℓとDCの交点をX，ℓとDAの交点をY，DPの中点をM，PからDCに下ろした垂線の足をQとする。

$\triangle\mathrm{DPQ}\backsim\triangle\mathrm{DXM}$であるから



$\mathrm{DP}:\mathrm{DX}=\mathrm{DQ}:\mathrm{DM}$

よって $\mathrm{DX}=\dfrac{\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DM}}{\mathrm{DQ}}=\dfrac{\mathrm{DP}^2}{2\mathrm{DQ}}=\dfrac{x^2+1}{2x}$

また，$\triangle\mathrm{DPQ}\backsim\triangle\mathrm{YXD}$であるから

$\mathrm{QD}:\mathrm{DY}=\mathrm{QP}:\mathrm{DX}$

よって $\mathrm{DY}=\dfrac{\mathrm{QD}\cdot\mathrm{DX}}{\mathrm{QP}}=\dfrac{x^2+1}{2}$

$\mathrm{DX}\geqq a$ かつ $0<x\leqq a$ を解くと $0<x\leqq a-\sqrt{a^2-1}$

このとき，BCの右側にはみ出る部分が存在する。

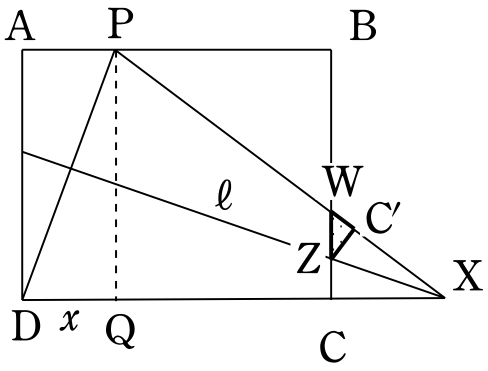
$\mathrm{DY}\geqq 1$ かつ $0<x\leqq a$ を解くと $1\leqq x\leqq a$

このとき，ABの上側にはみ出る部分が存在する。

（ⅰ）$0<x\leqq a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

BC と ℓ，PX の交点を Z, W とし，C を折り返した点を C′ とする。

はみ出る部分は△C′WZ である。



△CZX∽△QDP より

$$\mathrm{CZ}=\mathrm{CX}\cdot\frac{\mathrm{QD}}{\mathrm{QP}}$$

△CWX∽△QPX より

$$\mathrm{CW}=\mathrm{CX}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QX}}=\mathrm{CX}\cdot\frac{1}{\dfrac{x^2+1}{2x}-x}=\mathrm{CX}\cdot\frac{2x}{1-x^2}$$

また，△CZX ≡△C′ZX であるから

$$S=\triangle\mathrm{CWX}-2\triangle\mathrm{CZX}=\frac{1}{2}\mathrm{CX}\cdot\mathrm{CW}-2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{CX}\cdot\mathrm{CZ}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{CX}\left(\mathrm{CW}-2CZ\right)=\frac{1}{2}\mathrm{CX}\cdot\mathrm{CX}\left(\frac{2x}{1-x^2}-2x\right)$$

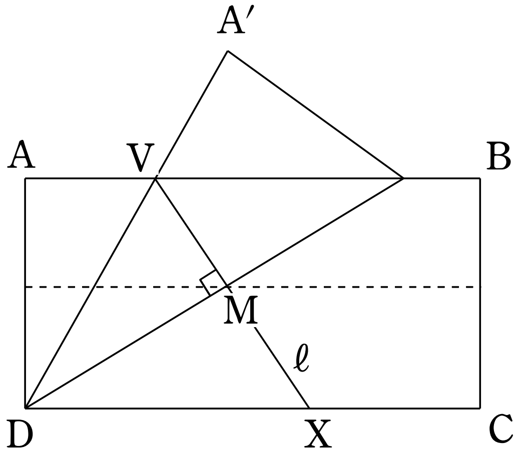
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{2x}-a\right)^2\frac{2x^3}{1-x^2}=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}\quad\cdots①$$

（ⅱ）$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$ のとき

はみ出る部分はないので $S=0$

（ⅲ）$x\geqq 1$ のとき

A を折り返した点を A′，ℓ と AB の交点を V とする。



はみ出る部分は△A´VPであり，これは△AVDの面積と等しい。

DPの中点Mは，ADの中点とBCの中点を結ぶ直線上にあるから MV＝MX

よって，△MDX≡△MPV より VP＝DX である。

$$S=\triangle \mathrm{A'VP}=\triangle \mathrm{AVD}=\frac{1}{2}\mathrm{AV}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{2}(\mathrm{AP}-\mathrm{VP})$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{AP}-\mathrm{DX})=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2+1}{2x}\right)=\frac{x^2-1}{4x}$$

(2) $a=1$のとき

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^4}{4(1+x)(1-x)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}\quad (0<x\leqq 1)\quad \cdots②$$

$x=0$のとき，②でも$S=0$となるので

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^4}{4(1+x)(1-x)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}\quad (0\leqq x\leqq 1)$$

ここで，

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\{(1-x)^3-3x(1-x)^2\}(1+x)-x(1-x)^3}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2[\{(1-x)-3x\}(1+x)-x(1-x)]}{4(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2(-3x^2-4x+1)}{4(1+x)^2}$$

であり，$\dfrac{dS}{dx}=0$となるx（$0\leqq x\leqq 1$）は $x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ である。

増減を考えると，このxが極大かつ最大であるので，求めるxの値は $x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$

［ 東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{4}$ ］

n は正の整数とし，文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。

A_n の要素に対し次の条件（＊）を考える。

（＊）文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件（＊）を満たす確率 $\mathrm{P}(n)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 12$ とする。A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件（＊）を満たし，その 7 番目の文字は c であった。このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $\mathrm{Q}(n)$ とする。極限値 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Q}(n)$ を求めよ。

A_n の要素の個数は 3^n である。

（＊）を満たす A_n の要素のうち，

先頭が a または b であるものが x_n 個,

先頭が c であるものが y_n 個

あるとし，$z_n = x_n + y_n$ とおく。

（＊）を満たす A_{n+1} の要素のうち，先頭が a, b, c であるものはそれぞれ

z_n, z_n, x_n 個ずつあるから，$x_{n+1} = 2z_n$，$y_{n+1} = x_n$（$n \geqq 1$）である。

したがって

$$2z_n = x_{n+1} = z_{n+1} - y_{n+1} = z_{n+1} - x_n = z_{n+1} - 2z_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

が得られ，$z_{n+2} = 2z_{n+1} + 2z_n$（$n \geqq 1$）…① となる。

ここで，２次方程式 $t^2 - 2t - 2 = 0$ の解を $\alpha = 1-\sqrt{3},\ \beta = 1+\sqrt{3}$ とおくと

①は次のように２通りに変形できる。

$$z_{n+2} - \alpha z_{n+1} = \beta\left(z_{n+1} - \alpha z_n\right) \quad \cdots②$$

$$z_{n+2} - \beta z_{n+1} = \alpha\left(z_{n+1} - \beta z_n\right) \quad \cdots③$$

$z_1=3,\ z_2=8$ であるから，

　②より　$z_{n+1}-\alpha z_n=\beta^{n-1}\left(z_2-\alpha z_1\right)=\beta^{n-1}\left(5+3\sqrt{3}\right)$

　③より　$z_{n+1}-\beta z_n=\alpha^{n-1}\left(z_2-\beta z_1\right)=\alpha^{n-1}\left(5-3\sqrt{3}\right)$

これらから

$$z_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right\}$$

が得られる。

(1)　$\mathrm{P}(n)=\dfrac{z_n}{3^n}=\dfrac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}$

(2)（＊）を満たし，さらに7番目の文字が c である条件を（＊２）と表す。

7番目の文字が c であるとき，6番目には a または b のいずれかが入るので

1番目から6番目までの文字の並び方は x_6 通りある。

（＊２）を満たすものは7番目の文字が c であるから，8番目以降の文字の決め方は x_{n-7} 通りある。

よって，（＊２）を満たすものは　$x_6\cdot x_{n-7}$　通りある。

また，（＊２）かつ10文字目が c であるものは，8番目と9番目には a または b のいずれかが入り，

11番目以降は x_{n-10} 通りあるので，$x_6\cdot 2\cdot 2\cdot x_{n-10}$　通りある。

したがって

$$\mathrm{Q}(n)=\frac{x_6\cdot 2\cdot 2\cdot x_{n-\ 1}}{x_6\cdot x_{n-7}}=\frac{4x_{n-10}}{x_{n-7}}=\frac{4\cdot 2z_{n-11}}{2z_{n-8}}=\frac{4z_{n-11}}{z_{n-8}}$$

$$=4\cdot\frac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\beta^{n-12}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\alpha^{n-12}}{\left(5+3\sqrt{3}\right)\beta^{n-9}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\alpha^{n-9}}=4\cdot\frac{1-\dfrac{5-3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-12}}{\beta^3-\dfrac{5-3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-12}\alpha^3}$$

ここで，$0<\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-12}=0$　であるから

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Q}(n)=4\cdot\frac{1}{\beta^3}=\frac{4}{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}=\frac{4}{10+6\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$$

となる。

[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

実数 $a,\ b,\ c$ に対して， $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1,\ f(x)=x^2+cx+1$ とおく。

また，複素数平面内の単位円周から２点$1,\ -1$を除いたものをT とする。

(1)　$f(x)=0$ の解がすべてT 上にあるための必要十分条件をc を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべてT 上にあるならば， $F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 $c_1,\ c_2$ が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべてT 上にあるための必要十分条件を$a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点$(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1)　$f(x)=0$ が実数解をもたないとき， $c^2-4<0 \iff -2<c<2$

このとき， $f(x)=0$ の解を$\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係より $\alpha\overline{\alpha}=1 \iff |\alpha|=1$

したがって， α はT 上にある。よって，求める必要十分条件は $-2<c<2$

(2)　$F(x)$は実数係数の４次方程式であるから， $F(x)=0$ の解がすべてT 上にあるとき，

$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$（ただし，それぞれの絶対値は1）と表せる。

よって， $F(x)=\left(x-\alpha\right)\left(x-\overline{\alpha}\right)\left(x-\beta\right)\left(x-\overline{\beta}\right)$

$$=\left\{x^2-\left(\alpha+\overline{\alpha}\right)x+\alpha\overline{\alpha}\right\}\left\{x^2-\left(\beta+\overline{\beta}\right)x+\beta\overline{\beta}\right\}$$

となるが， $\alpha+\overline{\alpha},\ \beta+\overline{\beta}$ は実数， $\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1,\ \beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ であることより

$F(x)=\left(x^2-c_1x+1\right)\left(x^2-c_2x+1\right)$ を満たす実数$c_1,\ c_2$ が存在する。

(3) (1)，(2)より $F(x)=0$ の解がすべてT 上にある。

$$\iff \quad F(x)=\left(x^2-c_1x+1\right)\left(x^2-c_2x+1\right)$$

$-2<c_1<2,\ -2<c_2<2$ を満たす$c_1,\ c_2$ が存在する。

$\Leftrightarrow\quad a=c_1+c_2,\ b=c_1c_2+2,\ -2<c_1<2,\ -2<c_2<2$ を満たす $c_1,\ c_2$ が存在する。

$\Leftrightarrow\quad g(t)=t^2-at+b-2$ とおくと，方程式 $g(t)=0$ が $-2<t<2$ に２解をもつ。 …①

①が成り立つための条件は

$g(t)=0$ の判別式について $a^2-4(b-2)\geqq 0$

$y=g(t)$ の軸について $-2<\dfrac{a}{2}<2$

端点について $g(-2)>0$ かつ $g(2)>0$

これらより

$b\leqq\dfrac{1}{4}a^2+2$，$-4<a<4$，$b>-2a-2$，$b>2a-2$

を得る。

これらを満たす点 $(a,\ b)$ を図示すると次の図の打点部分になる。

ただし，境界は放物線上の $x\neq\pm4$ の部分のみ含む。