[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{1}$]

次の条件（ｉ）（ⅱ）をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

（ｉ）N の正の約数は 12 個

（ⅱ）N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12。

ただし，N の約数には 1 と N も含める。

[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{2}$]

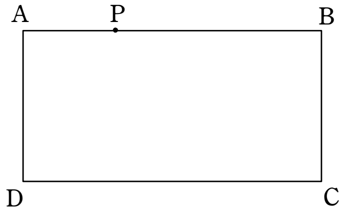
☆―――☆

実数 x の関数 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ。

☆―――☆

[**東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{3}$**]

a を1以上の実数とする。図のような長方形の折り紙ABCDが机の上に置かれている。ただし，$\mathrm{AD}=1$, $\mathrm{AB}=a$ である。P を辺AB上の点とし，$\mathrm{AP}=x$ とする。頂点Dを持ち上げてPと一致するように折り紙を一回折ったとき，もとの長方形ABCDからはみ出る部分の面積を S とする。



(1) S を a と x で表せ。

(2) $a=1$ とする。P がAからBまで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない。）

[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{4}$]

n は正の整数とし，文字 $a,\ b,\ c$ を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。

A_n の要素に対し次の条件（＊）を考える。

（＊）文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件（＊）を満たす確率 $\mathrm{P}(n)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 12$ とする。A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件（＊）を満たし，その 7 番目の文字は c であった。このとき，この要素の10番目の文字が c である確率を $\mathrm{Q}(n)$ とする。

極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{Q}(n)$ を求めよ。

[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{5}$]

実数 $a,\ b,\ c$ に対して，$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1,\ \ f(x)=x^2+cx+1$ とおく。

また，複素数平面内の単位円周から 2 点 $1,\ -1$ を除いたものを T とする。

(1) $f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 $c_1,\ c_2$ が存在することを示せ。

(3) $F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。