[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{5}$]

実数$a,\ b,\ c$に対して，$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1,\ f(x)=x^2+cx+1$ とおく。

また，複素数平面内の単位円周から２点$1,\ -1$を除いたものをTとする。

(1) $f(x)=0$の解がすべてT上にあるための必要十分条件をcを用いて表せ。

(2) $F(x)=0$の解がすべてT上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$を満たす実数

$c_1,\ c_2$が存在することを示せ。

(3) $F(x)=0$の解がすべてT上にあるための必要十分条件を$a,\ b$を用いて表し，

それを満たす点$(a,\ b)$の範囲を座標平面上に図示せよ。

---

(1) $f(x)=0$ が実数解をもたないとき，$c^2-4<0\ \Leftrightarrow\ -2<c<2$

このとき，$f(x)=0$の解を$\alpha,\ \overline{\alpha}$とおくと，解と係数の関係より $\alpha\overline{\alpha}=1\ \Leftrightarrow\ |\alpha|=1$

したがって，αはT上にある。よって，求める必要十分条件は $-2<c<2$

(2) $F(x)$は実数係数の４次方程式であるから，$F(x)=0$の解がすべてT上にあるとき，

$\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$（ただし，それぞれの絶対値は1）と表せる。

よって，$F(x)=\left(x-\alpha\right)\left(x-\overline{\alpha}\right)\left(x-\beta\right)\left(x-\overline{\beta}\right)$

$$=\left\{x^2-\left(\alpha+\overline{\alpha}\right)x+\alpha\overline{\alpha}\right\}\left\{x^2-\left(\beta+\overline{\beta}\right)x+\beta\overline{\beta}\right\}$$

となるが，$\alpha+\overline{\alpha},\ \beta+\overline{\beta}$は実数，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1,\ \beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ であることより

$F(x)=\left(x^2-c_1x+1\right)\left(x^2-c_2x+1\right)$ を満たす実数$c_1,\ c_2$が存在する。

(3) (1), (2)より $F(x)=0$の解がすべてT上にある。

$\Leftrightarrow\quad F(x)=\left(x^2-c_1x+1\right)\left(x^2-c_2x+1\right)$

$-2<c_1<2,\ -2<c_2<2$ を満たす$c_1,\ c_2$が存在する。

$\Leftrightarrow \quad a=c_1+c_2,\ b=c_1c_2+2,\ -2<c_1<2,\ -2<c_2<2$ を満たす c_1, c_2 が存在する。

$\Leftrightarrow \quad g(t)=t^2-at+b-2$ とおくと，方程式 $g(t)=0$ が $-2<t<2$ に２解をもつ。 …①

①が成り立つための条件は

$g(t)=0$ の判別式について $a^2-4(b-2)\geqq 0$

$y=g(t)$ の軸について $-2<\dfrac{a}{2}<2$

端点について $g(-2)>0$ かつ $g(2)>0$

これらより

$b\leqq \dfrac{1}{4}a^2+2$，$-4<a<4$，$b>-2a-2$，$b>2a-2$

を得る。

これらを満たす点 (a, b) を図示すると次の図の打点部分になる。

ただし，境界は放物線上の $x\neq\pm 4$ の部分のみ含む。