[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{4}$]

n は正の整数とし，文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。

A_n の要素に対し次の条件（＊）を考える。

（＊）文字 c が２つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を一つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1) A_n から要素を一つ選ぶとき，それが条件（＊）を満たす確率 $\mathrm{P}(n)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 12$ とする。A_n から要素を一つ選んだところ，これは条件（＊）を満たし，その７番目の文字は c であった。このとき，この要素の10番目の文字が c である確率を $\mathrm{Q}(n)$ とする。

極限値 $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Q}(n)$ を求めよ。

A_n の要素の個数は 3^n である。

（＊）を満たす A_n の要素のうち，

先頭が a または b であるものが x_n 個,

先頭が c であるものが y_n 個

あるとし， $z_n = x_n + y_n$ とおく。

（＊）を満たす A_{n+1} の要素のうち，先頭が a, b, c であるものはそれぞれ

z_n, z_n, x_n 個ずつあるから， $x_{n+1} = 2z_n$， $y_{n+1} = x_n$ （$n \geqq 1$）である。

したがって

$$2z_n = x_{n+1} = z_{n+1} - y_{n+1} = z_{n+1} - x_n = z_{n+1} - 2z_{n-1} \quad (n \geqq 2)$$

が得られ， $z_{n+2} = 2z_{n+1} + 2z_n$ （$n \geqq 1$）…① となる。

ここで，２次方程式 $t^2 - 2t - 2 = 0$ の解を $\alpha = 1-\sqrt{3}, \beta = 1+\sqrt{3}$ とおくと

①は次のように２通りに変形できる。

$$z_{n+2} - \alpha z_{n+1} = \beta\left(z_{n+1} - \alpha z_n\right) \quad \cdots ②$$

$$z_{n+2} - \beta z_{n+1} = \alpha\left(z_{n+1} - \beta z_n\right) \quad \cdots ③$$

$z_1=3,\ z_2=8$ であるから，

②より　$z_{n+1}-\alpha z_n=\beta^{n-1}\left(z_2-\alpha z_1\right)=\beta^{n-1}\left(5+3\sqrt{3}\right)$

③より　$z_{n+1}-\beta z_n=\alpha^{n-1}\left(z_2-\beta z_1\right)=\alpha^{n-1}\left(5-3\sqrt{3}\right)$

これらから

$$z_n=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left\{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}\right\}$$

が得られる。

(1) $\mathrm{P}(n)=\dfrac{z_n}{3^n}=\dfrac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}$

(2) （＊）を満たし，さらに7番目の文字が c である条件を（＊２）と表す。

7番目の文字が c であるとき，6番目には a または b のいずれかが入るので

1番目から6番目までの文字の並び方は x_6 通りある。

（＊２）を満たすものは7番目の文字が c であるから，8番目以降の文字の決め方は x_{n-7} 通りある。

よって，（＊２）を満たすものは　$x_6\cdot x_{n-7}$　通りある。

また，（＊２）かつ10文字目が c であるものは，8番目と9番目には a または b のいずれかが入り，

11番目以降は x_{n-10} 通りあるので，$x_6\cdot 2\cdot 2\cdot x_{n-10}$　通りある。

したがって

$$\mathrm{Q}(n)=\frac{x_6\cdot 2\cdot 2\cdot x_{n-\ 1}}{x_6\cdot x_{n-7}}=\frac{4x_{n-10}}{x_{n-7}}=\frac{4\cdot 2z_{n-11}}{2z_{n-8}}=\frac{4z_{n-11}}{z_{n-8}}$$

$$=4\cdot\frac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\beta^{n-12}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\alpha^{n-12}}{\left(5+3\sqrt{3}\right)\beta^{n-9}-\left(5-3\sqrt{3}\right)\alpha^{n-9}}=4\cdot\frac{1-\dfrac{5-3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-12}}{\beta^3-\dfrac{5-3\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-12}\alpha^3}$$

ここで，$0<\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-12}=0$　であるから

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Q}(n)=4\cdot\frac{1}{\beta^3}=\frac{4}{\left(1+\sqrt{3}\right)^3}=\frac{4}{10+6\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$$

となる。