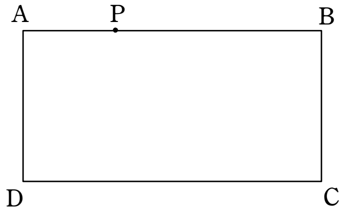
［ 東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{3}$ ］

a を1以上の実数とする。図のような長方形の折り紙ABCDが机の上に置かれている。

ただし，$\mathrm{AD}=1$, $\mathrm{AB}=a$ である。P を辺AB上の点とし，$\mathrm{AP}=x$ とする。

頂点Dを持ち上げてPと一致するように折り紙を一回折った

とき，もとの長方形ABCDからはみ出る部分の面積を S とする。



(1) S を a と x で表せ。

(2) $a=1$ とする。PがAからBまで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお配布された白紙を自由に使ってよい。(白紙は回収しない。)

(1) $x=0$ のとき，$S=0$ である。

$x>0$ とする。

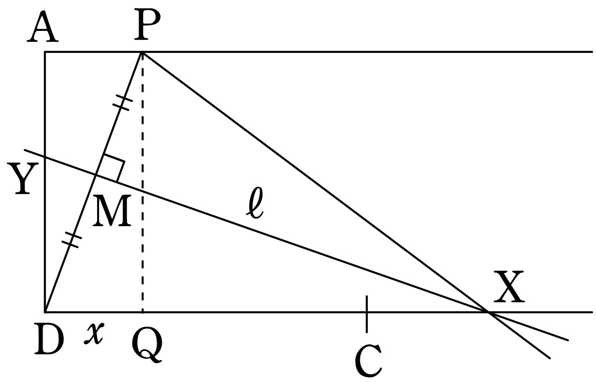
折り目となる直線はDPの垂直二等分線であり，これを ℓ とする。

さらに，ℓ とDCの交点をX，ℓ とDAの交点をY，DPの中点をM，PからDCに下ろした垂線の足をQとする。

$\triangle\mathrm{DPQ}\backsim\triangle\mathrm{DXM}$ であるから

$\mathrm{DP}:\mathrm{DX}=\mathrm{DQ}:\mathrm{DM}$

よって $\mathrm{DX}=\dfrac{\mathrm{DP}\cdot\mathrm{DM}}{\mathrm{DQ}}=\dfrac{\mathrm{DP}^2}{2\mathrm{DQ}}=\dfrac{x^2+1}{2x}$



また，$\triangle\mathrm{DPQ}\backsim\triangle\mathrm{YXD}$ であるから

$\mathrm{QD}:\mathrm{DY}=\mathrm{QP}:\mathrm{DX}$

よって $\mathrm{DY}=\dfrac{\mathrm{QD}\cdot\mathrm{DX}}{\mathrm{QP}}=\dfrac{x^2+1}{2}$

$\mathrm{DX}\geqq a$ かつ $0<x\leqq a$ を解くと $0<x\leqq a-\sqrt{a^2-1}$

このとき，BCの右側にはみ出る部分が存在する。

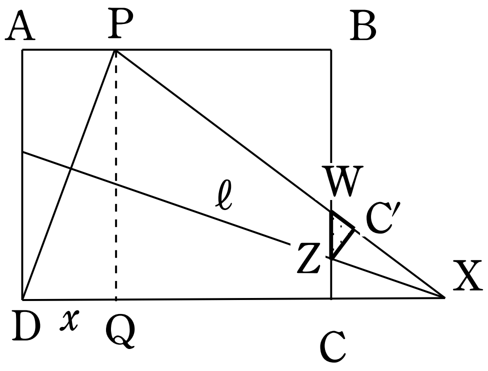
$\mathrm{DY}\geqq 1$ かつ $0<x\leqq a$ を解くと $1\leqq x\leqq a$

このとき，ABの上側にはみ出る部分が存在する。

（ｉ）$0 < x \leqq a-\sqrt{a^2-1}$ のとき

BC と ℓ，PX の交点を Z, W とし，C を折り返した点を C′ とする。

はみ出る部分は△C′WZ である。



△CZX∽△QDP より

$$\mathrm{CZ}=\mathrm{CX}\cdot\frac{\mathrm{QD}}{\mathrm{QP}}$$

△CWX∽△QPX より

$$\mathrm{CW}=\mathrm{CX}\cdot\frac{\mathrm{QP}}{\mathrm{QX}}=\mathrm{CX}\cdot\frac{1}{\dfrac{x^2+1}{2x}-x}=\mathrm{CX}\cdot\frac{2x}{1-x^2}$$

また，△CZX ≡△C′ZX であるから

$$S=\triangle\mathrm{CWX}-2\triangle\mathrm{CZX}=\frac{1}{2}\mathrm{CX}\cdot\mathrm{CW}-2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{CX}\cdot\mathrm{CZ}$$

$$=\frac{1}{2}\mathrm{CX}\left(\mathrm{CW}-2CZ\right)=\frac{1}{2}\mathrm{CX}\cdot\mathrm{CX}\left(\frac{2x}{1-x^2}-2x\right)$$

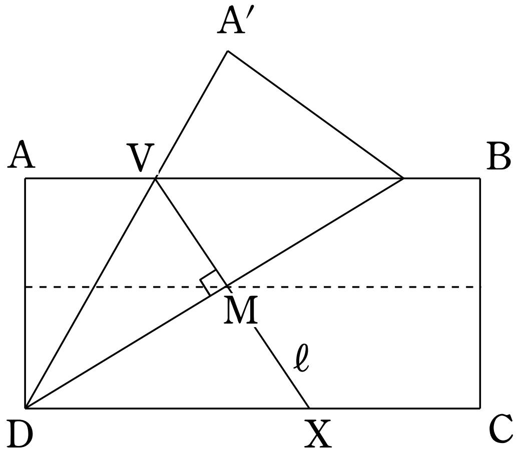
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{2x}-a\right)^2\frac{2x^3}{1-x^2}=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)} \quad \cdots①$$

（ⅱ）$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$ のとき

はみ出る部分はないので $S=0$

（ⅲ）$x\geqq 1$ のとき

A を折り返した点を A′，ℓ と AB の交点を V とする。



はみ出る部分は△A´VPであり，これは△AVDの面積と等しい。

DPの中点Mは，ADの中点とBCの中点を結ぶ直線上にあるから MV＝MX

よって，△MDX≡△MPV より VP＝DX である。

$$S=\triangle \mathrm{A'VP}=\triangle \mathrm{AVD}=\frac{1}{2}\mathrm{AV}\cdot\mathrm{AD}=\frac{1}{2}(\mathrm{AP}-\mathrm{VP})$$

$$=\frac{1}{2}(\mathrm{AP}-\mathrm{DX})=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2+1}{2x}\right)=\frac{x^2-1}{4x}$$

（2）$a=1$のとき

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^4}{4(1+x)(1-x)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)} \quad (0<x\leqq 1) \quad \cdots②$$

$x=0$のとき，②でも$S=0$となるので

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^4}{4(1+x)(1-x)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)} \quad (0\leqq x\leqq 1)$$

ここで，

$$\frac{dS}{dx}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\{(1-x)^3-3x(1-x)^2\}(1+x)-x(1-x)^3}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2[\{(1-x)-3x\}(1+x)-x(1-x)]}{4(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1-x)^2(-3x^2-4x+1)}{4(1+x)^2}$$

であり，$\dfrac{dS}{dx}=0$となるx（$0\leqq x\leqq 1$）は $x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ である。

増減を考えると，このxが極大かつ最大であるので，求めるxの値は $x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$