[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

実数 x の関数　$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$　の最大値と最小値を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$　において，$g(t)=\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}$　とおくと　$g(t+\pi)=g(t)$　である。

また，$\alpha=\frac{\pi}{2}$ とすると

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\alpha}g(t)\,dt=\int_x^{x+\alpha}g(t+\pi)\,dt=\int_x^{x+\alpha}g(t)\,dt=f(x)$$

であるから，$f(x)$ の周期は π である。

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ における最大値，最小値を求める。

（ i ）$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$\sin t\geqq 0$（$x\leqq t\leqq x+\alpha$）であるから

$f(x)=\int_x^{x+\alpha}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$　であり，

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\sin(x+\alpha)}{1+\sin^2(x+\alpha)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\\
&=\frac{\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\\
&=\frac{\cos x+\sin^2 x\cos x-\sin x-\sin x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\\
&=\frac{(\cos x-\sin x)-\sin x\cos x(\cos x-\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}\\
&=\frac{(\cos x-\sin x)(1-\sin x\cos x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}
\end{aligned}$$

ここで，$1-\sin x\cos x>0$ であるから，$f'(x)$ の正負は

$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3}{4}\pi\right)$　の正負と一致する。

（ⅱ）$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$x+\alpha \geqq \pi$ であるから

$$f(x)=\int_x^{x+\alpha} \frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$=\int_x^{\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt+\int_{\pi}^{x+\alpha} \frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt$$

$$f'(x)=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}+\frac{-\sin(x+\alpha)}{1+\sin^2(x+\alpha)}$$

$$=-\frac{\sin x}{1+\sin^2 x}-\frac{\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$=-\frac{\cos x(1+\sin^2 x)+\sin x(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=-\frac{\cos x+\sin^2 x\cos x+\sin x+\sin x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=-\frac{(\cos x+\sin x)+\sin x\cos x(\cos x+\sin x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

$$=-\frac{(\cos x+\sin x)(1+\sin x\cos x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

ここで，$1+\sin x\cos x>0$ であるから，$f'(x)$ の正負は

$-(\cos x+\sin x)=-\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ の正負と一致する。

（ⅰ）（ⅱ）より $0 \leqq x \leqq \pi$ における $f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		＋	0	－	－	－	0	＋	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

周期性より $f(0)=f(\pi)$ であるから，

$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{4}$ で最大値をとり，$x=\dfrac{3}{4}\pi$ で最小値をとる。

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}\,dt \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \frac{\sin t}{2-\cos^2 t}\,dt$$

ここで，$\cos t=u$ と置換すると

$-\sin t dt=du$，$t: \dfrac{\pi}{4} \to \dfrac{3}{4}\pi$ のとき $u: \dfrac{1}{\sqrt{2}} \to -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-du}{2-u^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{2-u^2}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{du}{\left(\sqrt{2}+u\right)\left(\sqrt{2}-u\right)}$$

$$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+u}-\frac{1}{\sqrt{2}-u}\right)du$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3$$

また,

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$$

$$=2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{-du}{2-u^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\log 3\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{2\log\left(\sqrt{2}+1\right)-\log 3\right\}$$