[東京工業大学 2017 年前期 $\boxed{1}$]

次の条件（ｉ）（ⅱ）をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

（ｉ）N の正の約数は12個

（ⅱ）N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は12。

ただし，N の約数には1と N も含める。

N が素因数分解により $p^a q^b r^c \cdots$（$p, q, r, \cdots$ は異なる素数，$a, b, c, \cdots$ は正の整数）と表されるものとする。$12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 3$ であるから，条件(ｉ)により N は

$N = p^{11}$，pq^5，p^2q^3，pqr^2

という形をしている。

また，条件(ⅱ)により12は N の約数であり，12の約数も N の約数になることから

1, 2, 3, 4, 6, 12 の 6 個も N の約数である。

従って，12が小さい方から並べて N の 7 番目の約数になるとき

5, 7, 8, 9, 10, 11のいずれか1つが N の約数となっていることになる。

ここで，N の約数を小さいものから順に $d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{12}$ とする。

約数の対称性から $N = d_6 d_7$ であり，条件(ⅱ)から $d_7 = 12$

ここで，d_6 について $6 \leqq d_6 < d_7 = 12$ であるから，$d_6 = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ について調べる。

① $d_6 = 6$ のとき　$N = 6\cdot 12 = 72 = 3^2 \cdot 2^3$ となるが，8 と 9 が N の約数となり，不適。

② $d_6 = 7$ のとき　$N = 7\cdot 12 = 84 = 3\cdot 7\cdot 2^2$ となり，適する。

③ $d_6 = 8$ のとき　$N = 8\cdot 12 = 96 = 3\cdot 2^5$ となり，適する。

④ $d_6 = 9$ のとき　$N = 9\cdot 12 = 108 = 2^2\cdot 3^3$ となり，適する。

⑤ $d_6 = 10$ のとき　$N = 10\cdot 12 = 120 = 2^3\cdot 3\cdot 5$ となり，適さない。

⑥ $d_6 = 11$ のとき　$N = 11\cdot 12 = 132 = 3\cdot 11\cdot 2^2$ となり，適する。

以上①～⑥より，求める N の値は 84, 96, 108, 132

［別解］

N が素因数分解により $p^a q^b r^c \cdots$（$p, q, r, \cdots$ は異なる素数，$a, b, c, \cdots$ は正の整数）と表されるものとする。

$12 = 2\cdot 6 = 3\cdot 4 = 2\cdot 2\cdot 3$ であるから，条件(ⅰ)により N は

$N = p^{11}$，pq^5，p^2q^3，pqr^2 …（＊）

という形をしている。

また，条件(ⅱ)により 12 は N の約数であり，12 の約数も N の約数になることから

$1, 2, 3, 4, 6, 12$ の 6 個も N の約数である。

従って，12 が小さい方から並べて N の 7 番目の約数になるとき

$5, 7, 8, 9, 10, 11$ のいずれか 1 つが N の約数となっていることになる。

① 5 が N の約数となるとき

2 が N の約数であることから 10 も N の約数になり，不適。

② 7 が N の約数となるとき

N は $12\cdot 7 = 2^2\cdot 3\cdot 7$ の倍数となるが，（＊）より $N = 2^2\cdot 3\cdot 7 = 84$ が適する。

③ 8 が N の約数となるとき

N は $2^3\cdot 3$ の倍数となるが，（＊）より

pq^5 において $p = 3,\ q = 2$ として得られるのは $3\cdot 2^5 = 96$ これは適する。

p^2q^3 において $p = 3,\ q = 2$ として得られるのは $3^2\cdot 2^3 = 72$ これは 9 も約数となり不適。

④ 9 が N の約数となるとき

N は $2^2\cdot 3^2$ の倍数となるが，（＊）より

p^2q^3 において $p = 2,\ q = 3$ として得られるのは $2^2\cdot 3^3 = 108$ これは適する。

p^2q^3 において $p = 3,\ q = 2$ として得られるのは $3^2\cdot 2^3 = 72$ これは 8 も約数となり不適。

⑤ 10 が N の約数となるとき

5 も N の約数になり，不適。

⑥ 11 が N の約数となるとき

N は $2^2\cdot 3\cdot 11$ の倍数となるが，（＊）より $N = 2^2\cdot 3\cdot 11 = 132$ が適する。

以上①～⑥より，求める N の値は $84,\ 96,\ 108,\ 132$