[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

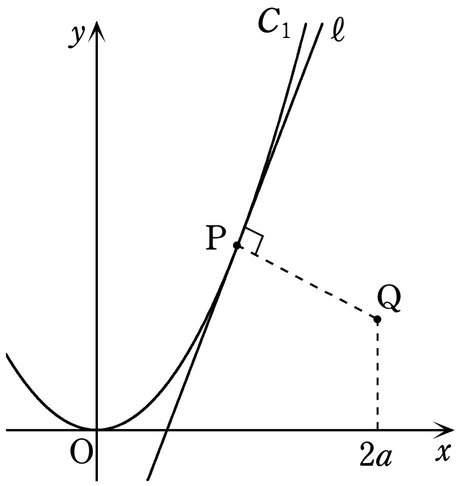
(1) 点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ。

(2) Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする。

P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ。

☆ ☆

(1) $C_1: y=\dfrac{x^2}{4}$, $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$



P は C_1 上の点でるから，$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ とおける。

P における C_1 の接線 ℓ の方向ベクトルは $\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)$ …①

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(2a-t,\ \dfrac{a^2}{4}-2-\dfrac{t^2}{4}\right)$ …②

①と②が垂直になるとき

$$\left(1,\ \frac{t}{2}\right)\cdot\left(2a-t,\ \frac{a^2}{4}-2-\frac{t^2}{4}\right)=(2a-t)+\frac{t}{2}\left(\frac{a^2}{4}-2-\frac{t^2}{4}\right)=0$$

整理して

$$t^3-(a^2-16)t-16a=0 \ \Leftrightarrow\ (t-a)(t^2+at+16)=0 \quad \cdots③$$

$t^2+at+16=0$ において，$a>0$ であるから解と係数の関係より２解の和は $-a$（<0），積は 16（>0）であるので２解とも負である。したがって，③の $t>0$ の解は $t=a$ のみである。

Q と C_1 は ℓ に関して反対側にあるので，求める最小値は $t=a$ のときの PQ である。

このとき，最小値は $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{(2a-a)^2+\left(\dfrac{a^2}{4}-2-\dfrac{a^2}{4}\right)^2}=\sqrt{a^2+4}$

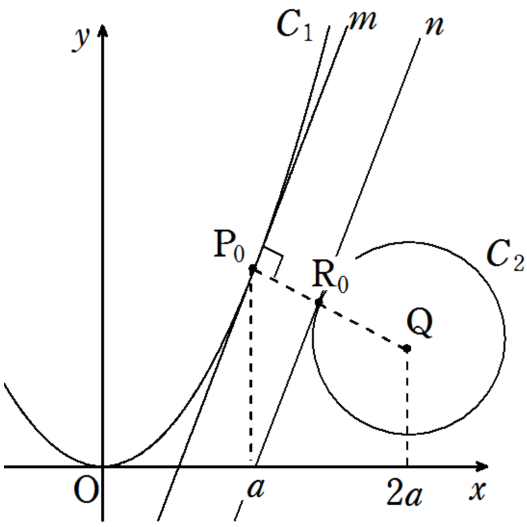
（2）C_2 は Q を中心とする半径 $\sqrt{2}a$ の円である。

$\sqrt{a^2+4} \leqq \sqrt{2}a \iff a^2 \geqq 4$

（ｉ）$a \geqq 2$ のとき

C_1 と C_2 は共有点をもつので P と R の距離の最小値は 0

（ⅱ）$0 < a < 2$ のとき



$\mathrm{P_0}\left(a, \dfrac{a^2}{4}\right)$ とし，$\mathrm{P_0}$ における C_1 の接線を m とすると m の方向ベクトルは $\left(1, \dfrac{a}{2}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q}} = (a, -2)$ であり，$\left(1, \dfrac{a}{2}\right) \cdot (a, -2) = 0$ より，これらは垂直である。

よって，m に平行な C_2 の接線のうち m に近い方を n とし，その接点を $\mathrm{R_0}$ とすると

$\mathrm{R_0Q} \perp n$ であるから，$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{R_0}$，Q は一直線上にある。

したがって $\mathrm{PR} \geqq$（m と n の距離）$= \mathrm{P_0R_0} = \mathrm{P_0Q} - \mathrm{R_0Q} = \sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$

となるので，PR の最小値は $\sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$

よって，$a \geqq 2$ のとき 0

$0 < a < 2$ のとき $\sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$

[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{2}$]

△ABC を一辺の長さが 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り, 出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}},\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

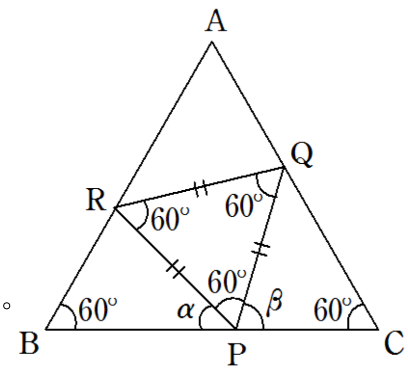
をみたすように取る。

(1) △PQR が正三角形になる確率を求めよ。

(2) 点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，互いに C, Q, P を互いに結んでできる図形を T_2，点 A, R, Q を結んでできる図形を T_3 とする。T_1, T_2, T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3) △PQR の面積を S とし，S のとりうる値の最小値を m とする。m の値および $S=m$ となる確率を求めよ。

(1) △PQR が正三角形であるとき



$\angle\mathrm{BPR}=\alpha$，$\angle\mathrm{QPC}=\beta$ とすると $\alpha+\beta+60^\circ=180^\circ$ であるから

$\angle\mathrm{BRP}$ （$=180^\circ-60^\circ-\alpha$）$=\beta$,

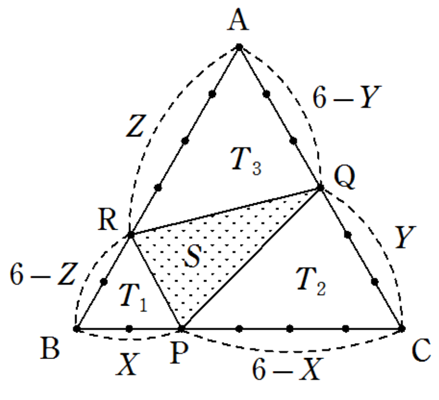
$\angle\mathrm{PQC}=\alpha$，$\angle\mathrm{RQA}=\beta$，$\angle\mathrm{QRA}=\alpha$ である。

したがって，$\triangle\mathrm{BPR}\equiv\triangle\mathrm{CQP}\equiv\triangle\mathrm{ARQ}$ となり，$X=Y=Z$ となる。

逆に，このとき△PRQ は正三角形となる。

$X=Y=Z$ となるのは 6 通りであるから，求める確率は $\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$

(2) T_1 と T_2 だけが正三角形になるとき



$X=6-Z$, $Y=6-X$, $Z\neq 6-Y$ より $Z=Y=6-X$, $X\neq 3$

これを満たす X, Y, Z の組合せは

$(X,\ Y,\ Z)=(1,\ 5,\ 5),\ (2,\ 4,\ 4),\ (4,\ 2,\ 2),\ (5,\ 1,\ 1)$

の 4 通りある。T_2, T_3 および T_3, T_1 についても 4 通りずつあるので

求める確率は $\dfrac{4\times 3}{6^3}=\dfrac{1}{18}$

(3) $\triangle \mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=9\sqrt{3}$ である。

S は$\triangle \mathrm{ABC}$ から$T_1,\ T_2,\ T_3$ の面積を引いて

$$S=9\sqrt{3}\left(1-\frac{X}{6}\cdot\frac{6-Z}{6}-\frac{Y}{6}\cdot\frac{6-X}{6}-\frac{Z}{6}\cdot\frac{6-Y}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{36-X(6-Z)-Y(6-X)-Z(6-Y)\right\}$$

ここで，$F=36-X(6-Z)-Y(6-X)-Z(6-Y)$ とおく。

F は$Y,\ Z$ を定数とみればX の１次式であるから，$X=1$ または$X=6$ で最小値をとる。

$Y,\ Z$ についても同様であるから，$X,\ Y,\ Z$ がいずれも1 または6 のときにF は最小値をとる。

F が$X,\ Y,\ Z$ の対称式であることに注意すると，

（ｉ）$X=Y=Z=1$ のとき

$F=36-1\cdot 5\cdot 3=21$

（ⅱ）$X,\ Y,\ Z$ のうち２つが1，1つが6 のとき

$X=Y=1,\ Z=6$ として $F=36-1\cdot 5-6\cdot 5=1$

（ⅲ）$X,\ Y,\ Z$ のうち1つが1，２つが6 のとき

$X=1,\ Y=Z=6$ として $F=36-6\cdot 5=6$

（ⅳ）$X=Y=Z=6$ のとき

$F=36$

したがって，S が最小となるのは（ⅱ）のときで，最小値m は $m=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

このとき$X,\ Y,\ Z$ の組は3組ある。

また，$F=(Y+Z-6)X+36-6Y-6Z+YZ$ であるが，

F がX の１次式にならないとき，すなわち $Y+Z=6$ のとき

$F=36-6(Y+Z)+YZ=YZ\ \geqq 5$

であるから，このときは最小値にはならない。

以上より $m=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$S=m$ となる確率は $\dfrac{3}{6^3}=\dfrac{1}{72}$

[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{3}$]

水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している。

(1) S_1, S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1, P_2 とする。線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の長さを求めよ。

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接する球すべてを考える。それらの球と α の接点は，1 つの円または 1 つの直線の上にあることを示せ。

---

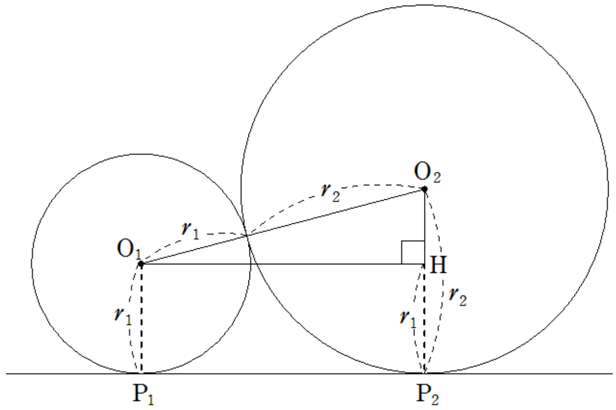
(1) S_1 の中心を O_1，S_2 の中心を O_2 とし，この 2 点と P_1，P_2 を通る平面での断面を考える。

直角三角形 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{H}$ において，三平方の定理より

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 = \mathrm{O}_1\mathrm{H}$$

$$= \sqrt{(r_1 + r_2)^2 - |r_1 - r_2|^2}$$

$$= 2\sqrt{r_1 r_2}$$



(2) 半径 r_3 の球 S_3 が S_1，S_2，α のすべてに接しているとする。

S_3 と α の接点を P_3 とすると，

(1)より　S_1 と S_3 が接することから　$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3 = 2\sqrt{r_1 r_3}$

S_2 と S_3 が接することから　$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3 = 2\sqrt{r_2 r_3}$　である。

平面 α 上に　$\mathrm{P}_1(0, 0)$, $\mathrm{P}_2\left(2\sqrt{r_1 r_2}, 0\right)$　となるような xy 座標を設定する。

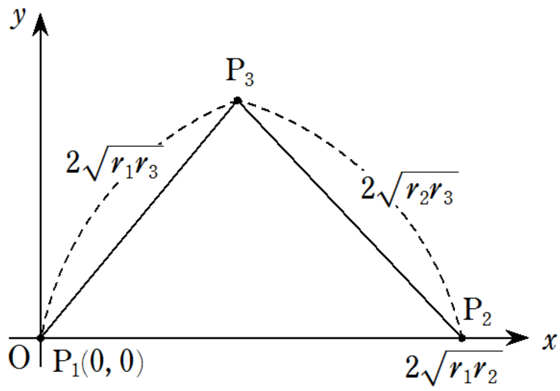
$\mathrm{P}_3(x, y)$ とすると

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3{}^2 = x^2 + y^2,\quad \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3{}^2 = \left(x - 2\sqrt{r_1 r_2}\right)^2 + y^2$$

であるから

$$x^2 + y^2 = 4r_1 r_3 \quad \cdots①$$

$$\left(x - 2\sqrt{r_1 r_2}\right)^2 + y^2 = 4r_2 r_3 \quad \cdots②$$



①$\times r_2 -$②$\times r_1$ より

$$r_2(x^2+y^2)-r_1\left\{\left(x-2\sqrt{r_1r_2}\right)^2+y^2\right\}=0 \iff (r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}\,x-4r_1^2r_2=0 \quad \cdots③$$

$r_1 \neq r_2$ のとき，③は円を表す。

$r_1 = r_2$ のとき，③は $x = r_1$ となり，直線を表す。

したがって，題意は示された。

[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{4}$]

☆

n を 2 以上の自然数とする。

（1）n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

（2）n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

☆

（1）n が素数のとき，$1, 2, \cdots, n-1$ はすべて n と互いに素である。

よって，それらの積 $(n-1)!$ も n と互いに素である。

$n=4$ のとき，$(n-1)!=6$ である。よって，4 で割り切れない。

以上より題意は示された。

（2）n（$\geqq 2$）は素数でなく，4 でもないとする。

n の最小の素因数を p とすると，$n=pa$（a は整数）と表せる。

最小の素因数が p であるから　$p \leqq a$　である。

・ $p<a$ のとき

$1, 2, \cdots, n-1$ の中に p と a（これらは異なる）が含まれるので

$(n-1)!$ は　$n=pa$　で割り切れる。

・ $p=a$ のとき

$n=p^2$ であるが，$n \neq 4$　であるから　$p \geqq 3$　である。

よって，$1, 2, \cdots, n-1$ の中に p と $2p$ が含まれる。

（$2p<3p \leqq p^2=n$ より $2p \leqq n-1$）

したがって，$(n-1)!$ は n（$=p^2$）で割り切れる。

以上より題意は示された。

［ 東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{5}$ ］

☆ ☆

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

☆ ☆

(1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

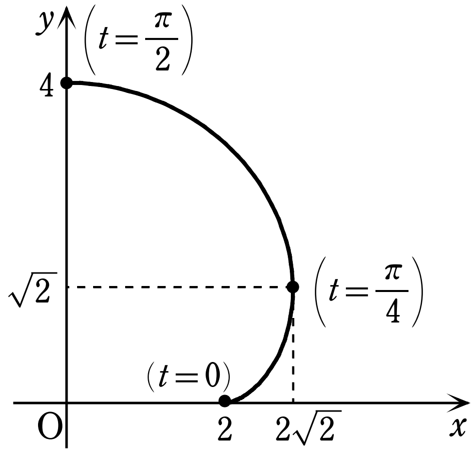
$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 3(\sin 3t - \sin t) = 3(3\sin t - 4\sin^3 t - \sin t) = 6\sin t(1 - 2\sin^2 t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 3(\cos t - \cos 3t) = 3(\cos t - 4\cos^3 t + 3\cos t) = 12\cos t(1 - \cos^2 t)$$

よって，C の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
(x, y)		↗		↖	

したがって，C の概形は次の通り。



（2）y 軸方向への積分として面積を求めると

$$\int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)\cdot 3(\cos t - \cos 3t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - \cos^2 3t - 4\cos t\cos 3t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2} + \frac{1+\cos 6t}{2} - 2(\cos 4t + \cos 2t)\right\} dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 6t - 2\cos 4t\right) dt$$

$$= 3\left[2t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}\sin 6t - \frac{1}{2}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 3\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 3\pi$$