[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{5}$]

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする：$\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases}$

ただし $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

---

(1) $\begin{cases} x = 3\cos t - \cos 3t \\ y = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \quad \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

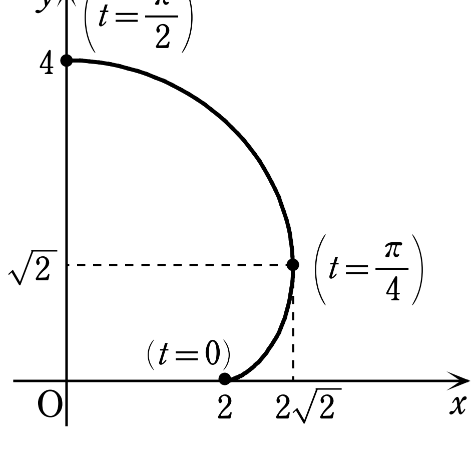
$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 3(\sin 3t - \sin t) = 3(3\sin t - 4\sin^3 t - \sin t) = 6\sin t(1 - 2\sin^2 t)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 3(\cos t - \cos 3t) = 3(\cos t - 4\cos^3 t + 3\cos t) = 12\cos t(1 - \cos^2 t)$$

よって，C の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	$+$	$+$	
$(x,\ y)$		$\nearrow$		$\nwarrow$	

したがって，C の概形は次の通り。



（2）y 軸方向への積分として面積を求めると

$$\int_0^4 x\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos t - \cos 3t)\cdot 3(\cos t - \cos 3t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos^2 t - \cos^2 3t - 4\cos t\cos 3t)\,dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{3\cdot\frac{1+\cos 2t}{2} + \frac{1+\cos 6t}{2} - 2(\cos 4t + \cos 2t)\right\} dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3 - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}\cos 6t - 2\cos 4t\right) dt$$

$$= 3\left[2t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{12}\sin 6t - \frac{1}{2}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 3\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= 3\pi$$