[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

n を 2 以上の自然数とする。

（1）n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

（2）n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

☆ ☆

（1）n が素数のとき，$1, 2, \cdots, n-1$ はすべて n と互いに素である。

よって，それらの積 $(n-1)!$ も n と互いに素である。

$n=4$ のとき，$(n-1)!=6$ である。よって，4 で割り切れない。

以上より題意は示された。

（2）n（$\geqq 2$）は素数でなく，4 でもないとする。

n の最小の素因数を p とすると，$n=pa$（a は整数）と表せる。

最小の素因数が p であるから　$p \leqq a$　である。

・ $p<a$ のとき

$1, 2, \cdots, n-1$ の中に p と a（これらは異なる）が含まれるので

$(n-1)!$ は　$n=pa$　で割り切れる。

・ $p=a$ のとき

$n=p^2$ であるが，$n \neq 4$　であるから　$p \geqq 3$　である。

よって，$1, 2, \cdots, n-1$ の中に p と $2p$ が含まれる。

（$2p<3p \leqq p^2=n$ より $2p \leqq n-1$）

したがって，$(n-1)!$ は n（$=p^2$）で割り切れる。

以上より題意は示された。