[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{3}$]

水平な平面αの上に半径r_1の球S_1と半径r_2の球S_2が乗っており，S_1とS_2は外接している。

(1) S_1, S_2がαと接する点をそれぞれP_1, P_2とする。線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$の長さを求めよ。

(2) αの上に乗っており，S_1とS_2の両方に外接する球すべてを考える。それらの球とαの接点は，1 つの円または 1 つの直線の上にあることを示せ。

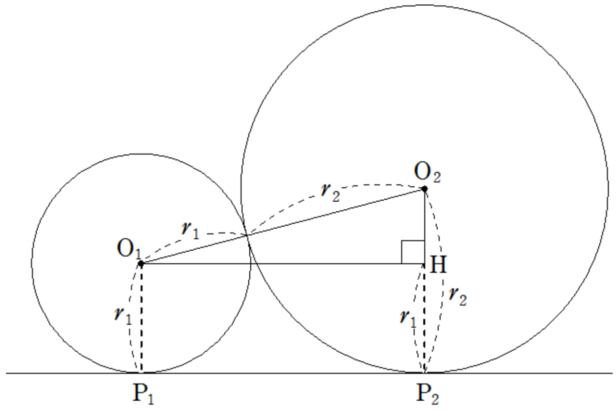
(1) S_1の中心をO_1，S_2の中心をO_2とし，この２点とP_1，P_2を通る平面での断面を考える。

直角三角形$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2\mathrm{H}$において，三平方の定理より

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\mathrm{O}_1\mathrm{H}$$

$$=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}$$

$$=2\sqrt{r_1r_2}$$



(2) 半径r_3の球S_3がS_1，S_2，αのすべてに接しているとする。

S_3とαの接点をP_3とすると，

(1)より　S_1とS_3が接することから　$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3=2\sqrt{r_1r_3}$

S_2とS_3が接することから　$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3=2\sqrt{r_2r_3}$　である。

平面α上に　$\mathrm{P}_1(0,\,0)$, $\mathrm{P}_2\left(2\sqrt{r_1r_2},\,0\right)$　となるようなxy座標を設定する。

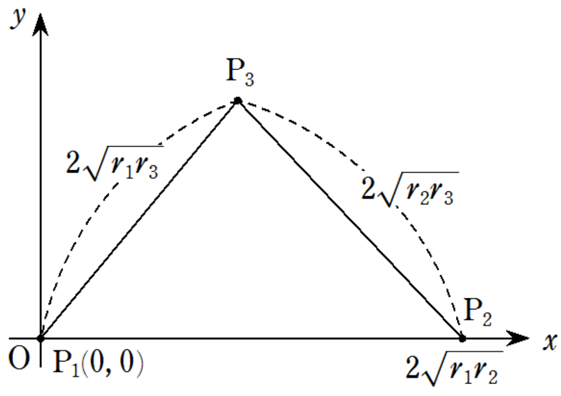
$\mathrm{P}_3(x,\,y)$とすると

$$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3{}^2=x^2+y^2,\quad \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3{}^2=\left(x-2\sqrt{r_1r_2}\right)^2+y^2$$

であるから

$$x^2+y^2=4r_1r_3\quad \cdots①$$

$$\left(x-2\sqrt{r_1r_2}\right)^2+y^2=4r_2r_3\quad \cdots②$$



①$\times r_2-$②$\times r_1$より

$$r_2(x^2+y^2)-r_1\left\{\left(x-2\sqrt{r_1r_2}\right)^2+y^2\right\}=0 \iff (r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}\,x-4r_1{}^2r_2=0 \quad \cdots③$$

$r_1\neq r_2$のとき，③は円を表す。

$r_1=r_2$のとき，③は$x=r_1$となり，直線を表す。

したがって，題意は示された。