[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

△ABC を一辺の長さが 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り, 出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}},\ \overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\frac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}},\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

をみたすように取る。

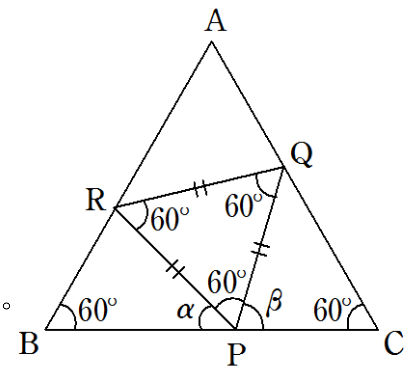
(1) △PQR が正三角形になる確率を求めよ。

(2) 点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，互いに C, Q, P を互いに結んでできる図形を T_2，点 A, R, Q を結んでできる図形を T_3 とする。T_1, T_2, T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3) △PQR の面積を S とし，S のとりうる値の最小値を m とする。m の値および $S=m$ となる確率を求めよ。

☆ ☆

(1) △PQR が正三角形であるとき



$\angle\mathrm{BPR}=\alpha$，$\angle\mathrm{QPC}=\beta$　とすると　$\alpha+\beta+60^\circ=180^\circ$　であるから

$\angle\mathrm{BRP}$（$=180^\circ-60^\circ-\alpha$）$=\beta$，

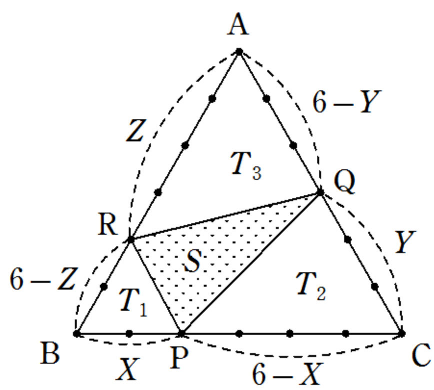
$\angle\mathrm{PQC}=\alpha$，$\angle\mathrm{RQA}=\beta$，$\angle\mathrm{QRA}=\alpha$　である。

したがって，△BPR ≡ △CQP ≡ △ARQ となり，$X=Y=Z$　となる。

逆に，このとき△PRQ は正三角形となる。

$X=Y=Z$ となるのは 6 通りであるから，求める確率は $\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$

(2) T_1 と T_2 だけが正三角形になるとき



$X=6-Z,\ Y=6-X,\ Z\neq 6-Y$　より　$Z=Y=6-X,\ X\neq 3$

これを満たす X, Y, Z の組合せは

$(X,\ Y,\ Z)=(1,\ 5,\ 5),\ (2,\ 4,\ 4),\ (4,\ 2,\ 2),\ (5,\ 1,\ 1)$

の 4 通りある。T_2, T_3 および T_3, T_1 についても 4 通りずつあるので

求める確率は $\dfrac{4\times 3}{6^3}=\dfrac{1}{18}$

(3) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$ である。

S は $\triangle \mathrm{ABC}$ から T_1, T_2, T_3 の面積を引いて

$$S = 9\sqrt{3}\left(1 - \frac{X}{6} \cdot \frac{6-Z}{6} - \frac{Y}{6} \cdot \frac{6-X}{6} - \frac{Z}{6} \cdot \frac{6-Y}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{36 - X(6-Z) - Y(6-X) - Z(6-Y)\right\}$$

ここで，$F = 36 - X(6-Z) - Y(6-X) - Z(6-Y)$ とおく。

F は Y, Z を定数とみれば X の 1 次式であるから，$X = 1$ または $X = 6$ で最小値をとる。

Y, Z についても同様であるから，X，Y，Z がいずれも 1 または 6 のときに F は最小値をとる。

F が X, Y, Z の対称式であることに注意すると，

(ｉ) $X = Y = Z = 1$ のとき

$F = 36 - 1 \cdot 5 \cdot 3 = 21$

(ⅱ) X, Y, Z のうち 2 つが 1，1 つが 6 のとき

$X = Y = 1,\ Z = 6$ として　$F = 36 - 1 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 1$

(ⅲ) X, Y, Z のうち 1 つが 1，2 つが 6 のとき

$X = 1,\ Y = Z = 6$ として　$F = 36 - 6 \cdot 5 = 6$

(ⅳ) $X = Y = Z = 6$ のとき

$F = 36$

したがって，S が最小となるのは(ⅱ)のときで，最小値 m は　$m = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

このとき X, Y, Z の組は 3 組ある。

また，$F = (Y + Z - 6)X + 36 - 6Y - 6Z + YZ$　であるが，

F が X の 1 次式にならないとき，すなわち　$Y + Z = 6$　のとき

$F = 36 - 6(Y + Z) + YZ = YZ \geqq 5$

であるから，このときは最小値にはならない。

以上より　$m = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$S = m$ となる確率は　$\dfrac{3}{6^3} = \dfrac{1}{72}$