[東京工業大学 2016 年前期 $\boxed{1}$]

a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

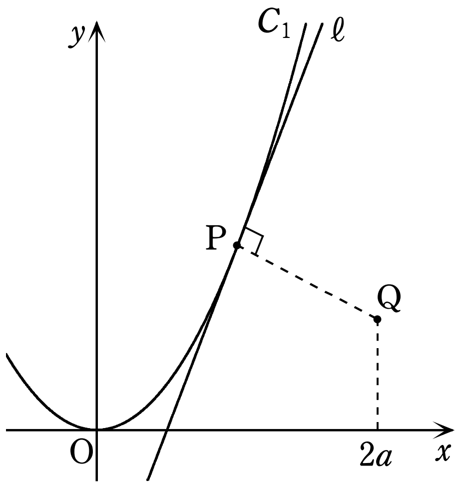
(1) 点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ。

(2) Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする。

P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ。

---

(1) $C_1 : y=\dfrac{x^2}{4}$，$\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$



P は C_1 上の点であるから，$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ とおける。

P における C_1 の接線 ℓ の方向ベクトルは $\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)$ …①

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(2a-t,\ \dfrac{a^2}{4}-2-\dfrac{t^2}{4}\right)$ …②

①と②が垂直になるとき

$$\left(1,\ \frac{t}{2}\right)\cdot\left(2a-t,\ \frac{a^2}{4}-2-\frac{t^2}{4}\right)=(2a-t)+\frac{t}{2}\left(\frac{a^2}{4}-2-\frac{t^2}{4}\right)=0$$

整理して

$$t^3-(a^2-16)t-16a=0 \iff (t-a)(t^2+at+16)=0 \quad \cdots③$$

$t^2+at+16=0$ において，$a>0$ であるから解と係数の関係より２解の和は $-a$（<0），積は 16（>0）であるので２解とも負である。したがって，③の $t>0$ の解は $t=a$ のみである。

Q と C_1 は ℓ に関して反対側にあるので，求める最小値は $t=a$ のときの PQ である。

このとき，最小値は $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{(2a-a)^2+\left(\dfrac{a^2}{4}-2-\dfrac{a^2}{4}\right)^2}=\sqrt{a^2+4}$

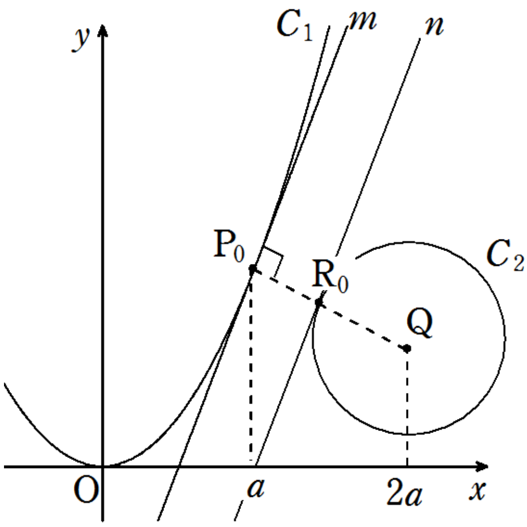
(2) C_2 は Q を中心とする半径 $\sqrt{2}a$ の円である。

$\sqrt{a^2+4} \leqq \sqrt{2}a \iff a^2 \geqq 4$

（ｉ）$a \geqq 2$ のとき

C_1 と C_2 は共有点をもつので P と R の距離の最小値は 0

（ⅱ）$0 < a < 2$ のとき



$\mathrm{P}_0\left(a, \dfrac{a^2}{4}\right)$ とし，P_0 における C_1 の接線を m とすると m の方向ベクトルは $\left(1, \dfrac{a}{2}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{Q}} = (a, -2)$ であり，$\left(1, \dfrac{a}{2}\right) \cdot (a, -2) = 0$ より，これらは垂直である。

よって，m に平行な C_2 の接線のうち m に近い方を n とし，その接点を R_0 とすると

$\mathrm{R}_0\mathrm{Q} \perp n$ であるから，P_0，R_0，Q は一直線上にある。

したがって $\mathrm{PR} \geqq$（m と n の距離）$= \mathrm{P}_0\mathrm{R}_0 = \mathrm{P}_0\mathrm{Q} - \mathrm{R}_0\mathrm{Q} = \sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$

となるので，PR の最小値は $\sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$

よって，$a \geqq 2$ のとき　0

$0 < a < 2$ のとき　$\sqrt{a^2+4} - \sqrt{2}a$