[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{1}$]

数列$\{a_n\}$を $a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）で定める。また数列$\{b_n\}$を

$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべてのnに対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ。

---

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

$a_2=\dfrac{11}{3},\ a_3=\dfrac{17}{5}$ である。

$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推定できるので，これが正しいことを数学的帰納法によって示す。

（ｉ）$n=1$のとき

$a_1=\dfrac{6\cdot1-1}{2\cdot1-1}=5$ より成り立つ。

（ii）$n=k$のとき $a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ であるとする。

このとき，$a_{k+1}=\dfrac{4a_k-9}{a_k-2}=\dfrac{4\cdot\dfrac{6k-1}{2k-1}-9}{\dfrac{6k-1}{2k-1}-2}=\dfrac{4(6k-1)-9(2k-1)}{6k-1-2(2k-1)}=\dfrac{6k+5}{2k+1}=\dfrac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$

であるから $n=k+1$ のときも成り立つ。よって示された。

（証明終）

(2) $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ であることを数学的帰納法によって示す。

（ｉ）$n=1$のとき

$b_1=a_1=5$，$3+\dfrac{4}{1+1}=5$ であるから成り立つ。

（ⅱ）$n=k$ のとき $b_k=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+ka_k}{1+2+\cdots+k}\leqq 3+\dfrac{4}{k+1}$ …① であるとする。

① ⇔ $a_1+2a_2+\cdots+ka_k\leqq\dfrac{1}{2}k(k+1)\left(3+\dfrac{4}{k+1}\right)=\dfrac{3}{2}k(k+1)+2k$ であるから

$a_1+2a_2+\cdots+ka_k\leqq\dfrac{3}{2}k(k+1)+2k$ が成り立っている。

このとき，$\dfrac{3}{2}(k+1)(k+2)+2(k+1)-\left(a_1+2a_2+\cdots+ka_k+(k+1)a_{k+1}\right)$

$$=\frac{3}{2}(k+1)(k+2)+2(k+1)-\left(a_1+2a_2+\cdots+ka_k+(k+1)\cdot\frac{6k+5}{2k+1}\right)$$

$$\geqq\frac{3}{2}(k+1)(k+2)+2(k+1)-\left(\frac{3}{2}k(k+1)+2k+(k+1)\cdot\frac{6k+5}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}(k+1)\left\{(k+2)-k\right\}+2-(k+1)\cdot\frac{6k+5}{2k+1}$$

$$=3(k+1)+2-(k+1)\left(3+\frac{2}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{2k}{2k+1}>0$$

となるから，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が成り立つ。

(3) $a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}=3+\dfrac{2}{2n-1}\geqq 3$ であるから $b_n\geqq\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 3+\cdots+n\cdot 3}{1+2+3+\cdots+n}=3$ である。

これと(2)より　$3\leqq b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つ。

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right)=3$ であるからはさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1,\ \mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。

頂点Oから平面ABCに垂線を下ろし，平面ABCとの交点をHとする。

頂点Aから平面OBCに垂線を下ろし，平面OBCとの交点をH′とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。

このとき，p, q, r および，s, t を x の式で表せ。

(2) 四面体OABCの体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。

☆ ☆

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ であり，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=x^2$ より $|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2$ から $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(2-x^2)$

同様にして $\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}(2-x^2)$ を得る。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ において，

四面体OABCはBCの垂直２等分面に関して対称であるから $q=r$ である。

また，Hは平面ABC上にあるから $p+q+r=1$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q(\vec{b}+\vec{c}),\ p+2q=1$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\{p\vec{a}+q(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})$$

$$=p\left\{\frac{1}{2}(2-x^2)-1\right\}+q\left\{\frac{1}{2}+1-2\cdot\frac{1}{2}(2-x^2)\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}x^2p+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)q$$

$$=-\frac{1}{2}x^2(1-2q)+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)q$$

$$=\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)q-\frac{1}{2}x^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから $\left(2x^2-\dfrac{1}{2}\right)q-\dfrac{1}{2}x^2=0$

したがって $q=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$, $r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$, $p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ において，対称性から $s=t$ である。

よって $\overrightarrow{\mathrm{AH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}$ と書けて

$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{b}=s(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=s\left(1+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}(2-x^2)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$s=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$, $t=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$

(2) (1)の s に対し,

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{AH'}}|^2&=|s(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}|^2\\
&=s^2(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)-2s(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2\\
&=3s^2-2s\cdot2\cdot\frac{1}{2}(2-x^2)+1\\
&=\frac{1}{3}(2-x^2)^2-\frac{2}{3}(2-x^2)^2+1\\
&=1-\frac{1}{3}(2-x^2)^2
\end{aligned}
$$

となるから

$$
\begin{aligned}
V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH'}\\
&=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\frac{1}{3}(2-x^2)^2}\\
&=\frac{1}{12}\sqrt{3-(2-x^2)^2}\\
&=\frac{1}{12}\sqrt{-x^4+4x^2-1}
\end{aligned}
$$

また，V の最大値は $x^2=2$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のときで，$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{3}$]

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

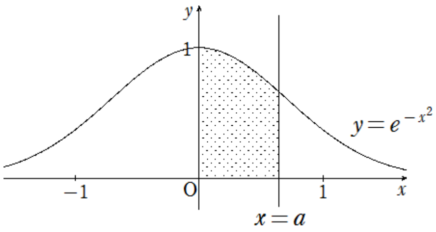
(2) 点 $(t,\ 0)$（$-a \leqq t \leqq a$）を通り，x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，

不等式 $S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

---

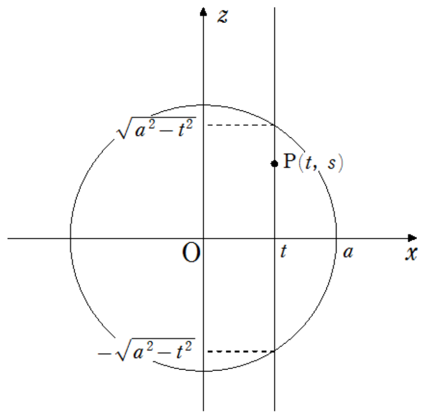
(1) $V=\int_0^a 2\pi x e^{-x^2}\,dx=\pi\left[-e^{-x^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$



(2) x 軸，y 軸にともに垂直な方向に z 軸を定める。

xz 平面の直線 $x=t$ 上に $\mathrm{P}(t,\ s)$ をとると $\mathrm{OP}=\sqrt{s^2+t^2}$ であるから

sy 平面に切り口を図示すると右下図のようになる。

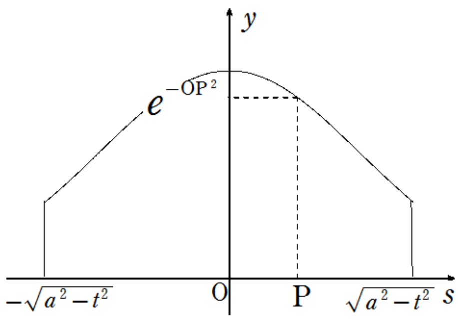


境界の曲線の方程式は $y=e^{-(s^2+t^2)}$ であるから

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

ここで，$-a \leqq -\sqrt{a^2-t^2}$，$\sqrt{a^2-t^2} \leqq a$，$e^{-(s^2+t^2)} \geqq 0$ であるから

$$S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$ が成り立つ。



(3) $V=\int_{-a}^{a} S(t)\,dt \leqq \int_{-a}^{a}\left\{\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(s^2+t^2)}\,ds\right\}dt$

$$=\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\right)dt=\left(\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\,dt\right)\left(\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\right)$$

$$=\left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

(1)の結果と合わせて $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \left(\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx\right)^2$ が成り立つ。

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{4}$]

　xy 平面上を運動する点 P の時刻 t（$t>0$）における座標 $(x,\ y)$ が $x=t^2\cos t,\ y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t（$t>0$）のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

$\mathrm{P}(x,\ y)=(t^2\cos t,\ t^2\sin t)$ である。

(1) $\vec{v}=(x',\ y')$ であり，$x'=2t\cos t-t^2\sin t$，$y'=2t\sin t+t^2\cos t$ であるから

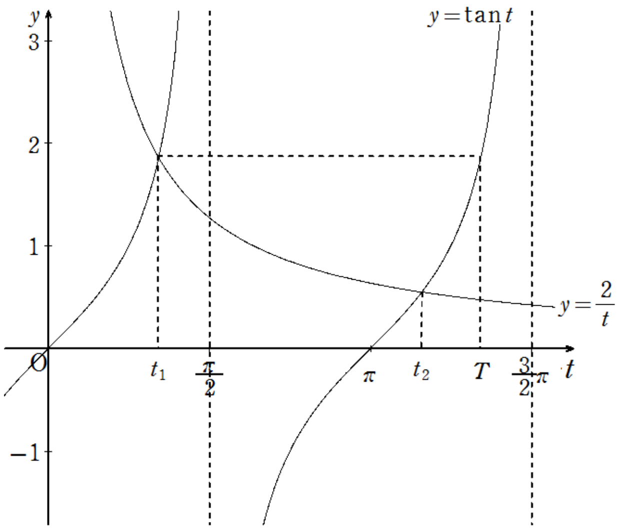
$$|\vec{v}|^2=(2t\cos t-t^2\sin t)^2+(2t\sin t+t^2\cos t)^2=4t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)+t^4(\sin^2 t+\cos^2 t)=4t^2+t^4$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^2\cos t(2t\cos t-t^2\sin t)+t^2\sin t(2t\sin t+t^2\cos t)=2t^3(\cos^2 t+\sin^2 t)=2t^3$$

これと $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2$ より

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^2\sqrt{4t^2+t^4}}=\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}$$

$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ であるから $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$



(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるとき，$x'=0$

したがって $2t\cos t-t^2\sin t=0$ より $2\cos t=t\sin t$ から $\tan t=\dfrac{2}{t}$ となる。

$t_1,\ t_2$ は $t>0$ での $y=\tan t$ と $y=\dfrac{2}{t}$ の交点と t 座標である（ただし，$t_1<t_2$）。

右上図のように T を定めると，$y=\tan t$ の周期が π であることから，$T=t_1+\pi$ であり，

$t^2<T$ であるから $t_2<t_1+\pi$ すなわち $t_2-t_1<\pi$ である。

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

n を相異なる素数 $p_1,\ p_2, \cdots,\ p_k$ （$k \geqq 1$）の積とする。

a, b を n の約数とするとき，a, b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，$f(a, b) = \dfrac{L}{G}$ とする。

（1） $f(a, b)$ が n の約数であることを示せ。

（2） $f(a, b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ。

（3） m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。

$S\big(f(a, b)\big) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ。

☆ ☆

（1） a, b は n の約数であるから L も n の約数である。

また，G も L の約数であるから $f(a, b) = \dfrac{L}{G}$ は整数であり，n の約数である。

（2） $a = Ga'$，$b = Gb'$ とおくと，$L = Ga'b'$ であるから $f(a, b) = \dfrac{L}{G} = \dfrac{Ga'b'}{G} = a'b'$

よって，$f(a, b) = b$ のとき $a'b' = Gb'$ すなわち $a' = G$ であるから

$a = Ga' = G^2$ となる。a は相異なる素数（0 個も含む）の積であるから $G = 1$ となり $a = 1$ である。

(3) (2)の G, a', b' を用いると

$S(f(a, b)) + S(a) + S(b) = S(a'b') + S(Ga') + S(Gb')$ …①

ここで，a, b は相異なる素数の積であるから，G, a', b' のどの２つも互いに素である。

よって，①$= S(a') + S(b') + S(G) + S(a') + S(G) + S(b')$

$= 2\{S(G) + S(a') + S(b')\}$

となり，これは偶数である。