[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{1}$]

数列$\{a_n\}$を $a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）で定める。また数列$\{b_n\}$を

$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべてのnに対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$を求めよ。

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{2}$]

四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$, $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。

頂点Oから平面ABCに垂線を下ろし，平面ABCとの交点をHとする。

頂点Aから平面OBCに垂線を下ろし，平面OBCとの交点をH′とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。

このとき，p, q, r および，s, t を x の式で表せ。

(2) 四面体OABCの体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{3}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに1回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)$（$-a \leqq t \leqq a$）を通り，x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t) \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{4}$]

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t（$t>0$）における座標 $(x,\ y)$ が $x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t（$t>0$）のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

n を相異なる素数 $p_1,\ p_2, \cdots,\ p_k$ （$k \geqq 1$）の積とする。

a, b を n の約数とするとき，a, b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，$f(a, b) = \dfrac{L}{G}$ とする。

(1) $f(a, b)$ が n の約数であることを示せ。

(2) $f(a, b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ。

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。

$S\left(f(a, b)\right) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ。

☆ ☆