[ 東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{5}$ ]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$n$ を相異なる素数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k$ （$k \geqq 1$）の積とする。

$a,\ b$ を $n$ の約数とするとき，$a,\ b$ の最大公約数を $G$，最小公倍数を $L$ とし，$f(a,\ b) = \dfrac{L}{G}$ とする。

(1) $f(a,\ b)$ が $n$ の約数であることを示せ。

(2) $f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ。

(3) $m$ を自然数とするとき，$m$ の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。

$S\big(f(a,\ b)\big) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $a,\ b$ は $n$ の約数であるから $L$ も $n$ の約数である。

また，$G$ も $L$ の約数であるから $f(a,\ b) = \dfrac{L}{G}$ は整数であり，$n$ の約数である。

(2) $a = Ga',\ b = Gb'$ とおくと，$L = Ga'b'$ であるから $f(a,\ b) = \dfrac{L}{G} = \dfrac{Ga'b'}{G} = a'b'$

よって，$f(a,\ b) = b$ のとき $a'b' = Gb'$ すなわち $a' = G$ であるから

$a = Ga' = G^2$ となる。$a$ は相異なる素数（0 個も含む）の積であるから $G = 1$ となり $a = 1$ である。

(3) (2)の $G,\ a',\ b'$ を用いると

$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b) = S(a'b') + S(Ga') + S(Gb')$ …①

ここで，$a,\ b$ は相異なる素数の積であるから，$G,\ a',\ b'$ のどの２つも互いに素である。

よって，①$= S(a') + S(b') + S(G) + S(a') + S(G) + S(b')$

$= 2\{S(G) + S(a') + S(b')\}$

となり，これは偶数である。