[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{4}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t（$t>0$）における座標 $(x,\ y)$ が $x=t^2\cos t,\ y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t（$t>0$）のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$\mathrm{P}(x,\ y)=(t^2\cos t,\ t^2\sin t)$ である。

(1) $\vec{v}=(x',\ y')$ であり，$x'=2t\cos t-t^2\sin t$，$y'=2t\sin t+t^2\cos t$ であるから

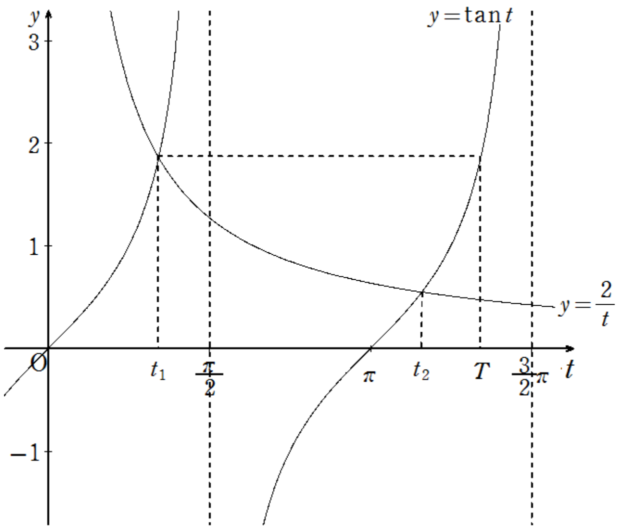
$|\vec{v}|^2=(2t\cos t-t^2\sin t)^2+(2t\sin t+t^2\cos t)^2=4t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)+t^4(\sin^2 t+\cos^2 t)=4t^2+t^4$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^2\cos t(2t\cos t-t^2\sin t)+t^2\sin t(2t\sin t+t^2\cos t)=2t^3(\cos^2 t+\sin^2 t)=2t^3$

これと $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2$ より

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^2\sqrt{4t^2+t^4}}=\frac{2}{\sqrt{4+t^2}}$$

$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ であるから $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$



(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるとき，$x'=0$

したがって $2t\cos t-t^2\sin t=0$ より $2\cos t=t\sin t$ から $\tan t=\dfrac{2}{t}$ となる。

$t_1,\ t_2$ は $t>0$ での $y=\tan t$ と $y=\dfrac{2}{t}$ の交点と t 座標である（ただし，$t_1<t_2$）。

右上図のように T を定めると，$y=\tan t$ の周期が π であることから，$T=t_1+\pi$ であり，

$t^2<T$ であるから $t_2<t_1+\pi$ すなわち $t_2-t_1<\pi$ である。