[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{3}$]

☆────────────────────────────────☆

$a>0$とする。曲線$y=e^{-x^2}$とx軸，y軸，および直線$x=a$で囲まれた図形を，y軸のまわりに1回転してできる回転体をAとする。

(1) Aの体積Vを求めよ。

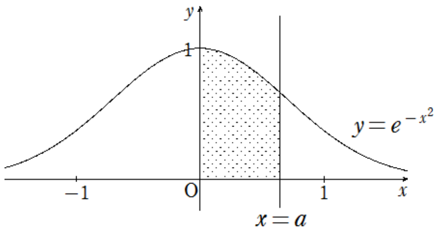
(2) 点$(t,\ 0)$（$-a\leqq t\leqq a$）を通り，x軸と垂直な平面によるAの切り口の面積を$S(t)$とするとき，

不等式 $S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

☆────────────────────────────────☆

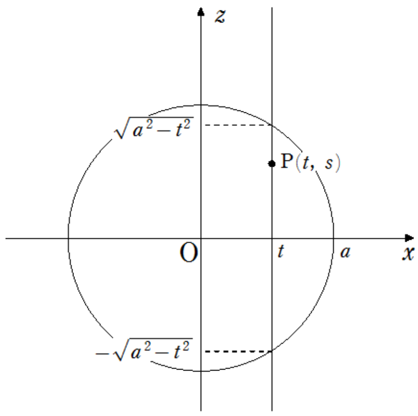
(1) $V=\int_0^a 2\pi xe^{-x^2}\,dx=\pi\Big[-e^{-x^2}\Big]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$



(2) x軸，y軸にともに垂直な方向にz軸を定める。

xz平面の直線$x=t$上に$\mathrm{P}(t,\ s)$をとると $\mathrm{OP}=\sqrt{s^2+t^2}$ であるから

sy平面に切り口を図示すると右下図のようになる。

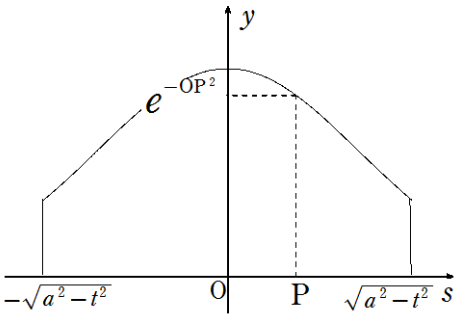


境界の曲線の方程式は $y=e^{-(s^2+t^2)}$ であるから

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

ここで，$-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}$，$\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$， $e^{-(s^2+t^2)}\geqq 0$ であるから

$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ が成り立つ。



(3) $V=\int_{-a}^{a}S(t)\,dt\leqq\int_{-a}^{a}\left\{\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(s^2+t^2)}\,ds\right\}dt$

$=\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\left(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\right)dt=\left(\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\,dt\right)\left(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\right)$

$=\left(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx\right)^2$

(1)の結果と合わせて $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\left(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx\right)^2$ が成り立つ。