[東京工業大学 2015年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

四面体OABCにおいて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1,\ \mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。

頂点Oから平面ABCに垂線を下ろし，平面ABCとの交点をHとする。

頂点Aから平面OBCに垂線を下ろし，平面OBCとの交点をH'とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。

このとき，p, q, r および，s, t をxの式で表せ。

(2) 四面体OABCの体積Vをxの式で表せ。また，xが変化するときのVの最大値を求めよ。

☆ ☆

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=1$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$ であり，

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=x^2$ より $|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2$ から $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}(2-x^2)$

同様にして $\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{1}{2}(2-x^2)$ を得る。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ において，

四面体OABCはBCの垂直２等分面に関して対称であるから $q=r$ である。

また，Hは平面ABC上にあるから $p+q+r=1$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q(\vec{b}+\vec{c}),\ p+2q=1$ であり，

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\{p\vec{a}+q(\vec{b}+\vec{c})\}\cdot(\vec{c}-\vec{a})\\
&=p\left\{\frac{1}{2}(2-x^2)-1\right\}+q\left\{\frac{1}{2}+1-2\cdot\frac{1}{2}(2-x^2)\right\}\\
&=-\frac{1}{2}x^2p+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)q\\
&=-\frac{1}{2}x^2(1-2q)+\left(x^2-\frac{1}{2}\right)q\\
&=\left(2x^2-\frac{1}{2}\right)q-\frac{1}{2}x^2
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ であるから $\left(2x^2-\dfrac{1}{2}\right)q-\dfrac{1}{2}x^2=0$

したがって $q=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$，$r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$，$p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ において，対称性から $s=t$ である。

よって $\overrightarrow{\mathrm{AH'}}=\overrightarrow{\mathrm{OH'}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}$ と書けて

$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{b}=s(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}=s\left(1+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{1}{2}(2-x^2)$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AH'}}\cdot\vec{b}=0$ であるから

$s=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$, $t=\dfrac{1}{3}(2-x^2)$

(2) (1)の s に対し，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH'}}|^2=|s(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}|^2$$

$$=s^2(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2)-2s(\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$$

$$=3s^2-2s\cdot 2\cdot\frac{1}{2}(2-x^2)+1$$

$$=\frac{1}{3}(2-x^2)^2-\frac{2}{3}(2-x^2)^2+1$$

$$=1-\frac{1}{3}(2-x^2)^2$$ となるから

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{OBC}\cdot\mathrm{AH'}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{1-\frac{1}{3}(2-x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{3-(2-x^2)^2}$$

$$=\frac{1}{12}\sqrt{-x^4+4x^2-1}$$

また，V の最大値は $x^2=2$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のときで，$\dfrac{\sqrt{3}}{12}$