[東京工業大学 2015 年前期 $\boxed{1}$]

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

数列$\{a_n\}$を $a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）で定める。また数列$\{b_n\}$を

$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべてのnに対して，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。

☆―――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $a_1=5,\ a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）

$a_2=\dfrac{11}{3}$，$a_3=\dfrac{17}{5}$ である。

$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推定できるので，これが正しいことを数学的帰納法によって示す。

（ｉ）$n=1$のとき

$a_1=\dfrac{6\cdot1-1}{2\cdot1-1}=5$ より成り立つ。

（ⅱ）$n=k$のとき $a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ であるとする。

このとき，$a_{k+1}=\dfrac{4a_k-9}{a_k-2}=\dfrac{4\cdot\dfrac{6k-1}{2k-1}-9}{\dfrac{6k-1}{2k-1}-2}=\dfrac{4(6k-1)-9(2k-1)}{6k-1-2(2k-1)}=\dfrac{6k+5}{2k+1}=\dfrac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$

であるから $n=k+1$ のときも成り立つ。よって示された。

（証明終）

(2) $b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ であることを数学的帰納法によって示す。

（ｉ）$n=1$のとき

$b_1=a_1=5$，$3+\dfrac{4}{1+1}=5$ であるから成り立つ。

（ⅱ）$n=k$ のとき $b_k=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+ka_k}{1+2+\cdots+k}\leqq 3+\dfrac{4}{k+1}$ …① であるとする。

① ⇔ $a_1+2a_2+\cdots+ka_k\leqq\dfrac{1}{2}k(k+1)\left(3+\dfrac{4}{k+1}\right)=\dfrac{3}{2}k(k+1)+2k$ であるから

$a_1+2a_2+\cdots+ka_k\leqq\dfrac{3}{2}k(k+1)+2k$ が成り立っている。

このとき，$\dfrac{3}{2}(k+1)(k+2)+2(k+1)-\left(a_1+2a_2+\cdots+ka_k+(k+1)a_{k+1}\right)$

$$=\frac{3}{2}(k+1)(k+2)+2(k+1)-\left(a_1+2a_2+\cdots+ka_k+(k+1)\cdot\frac{6k+5}{2k+1}\right)$$

$$\geqq\frac{3}{2}(k+1)(k+2)+2(k+1)-\left(\frac{3}{2}k(k+1)+2k+(k+1)\cdot\frac{6k+5}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}(k+1)\left\{(k+2)-k\right\}+2-(k+1)\cdot\frac{6k+5}{2k+1}$$

$$=3(k+1)+2-(k+1)\left(3+\frac{2}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{2k}{2k+1}>0$$

となるから，$n=k+1$ のときも成り立つ。

よって，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）が成り立つ。

(3) $a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}=3+\dfrac{2}{2n-1}\geqq 3$ であるから $b_n\geqq\dfrac{1\cdot 3+2\cdot 3+\cdots+n\cdot 3}{1+2+3+\cdots+n}=3$ である。

これと(2)より　$3\leqq b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つ。

ここで，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{4}{n+1}\right)=3$ であるからはさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$