[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{1}$]

3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\ b_n = \frac{n^2-1}{8}$$

（1）a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

（2）$a_n - b_n$ は 4 の倍数であることを示せ。

（1）
$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)\\
&= \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k)\\
&= \frac{1}{6}\left[\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2 - \frac{(n-1)n}{2}\right]\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)n}{4}\left\{(n-1)n-2\right\}\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)n}{4}(n-2)(n+1)\\
&= \frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}
\end{aligned}$$

ここで，n は 3 以上の奇数なので，$n=2m+1$（$m \geqq 1$）とすれば，

$$\begin{aligned}
a_n &= a_{2m+1}\\
&= \frac{(2m-1)2m(2m+1)(2m+2)}{24}\\
&= \frac{m(m+1)(2m-1)(2m+1)}{6}\\
&= \frac{m(m+1)(2m-1)\{(2(m+2)-3\}}{6}\\
&= \frac{2m(m+1)(m+2)(2m-1)-3m(m+1)(2m-1)}{6}\\
&= \frac{m(m+1)(m+2)(2m-1)}{3} - \frac{m(m+1)(2m-1)}{2}
\end{aligned}$$

であり，$m(m+1)(m+2)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数，

$m(m+1)$ は連続する 2 整数の積なので 2 の倍数となるから a_n は整数となる。

さらに，b_n についても

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{2m+1} \\
&= \frac{(2m+1)^2-1}{8} \\
&= \frac{4m^2+4m+1-1}{8} \\
&= \frac{m(m+1)}{2}
\end{aligned}
$$

であるから，b_n も整数となる。

（2）$a_n - b_n = a_{2m+1} - b_{2m+1}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m(m+1)(2m-1)(2m+1)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} \\
&= \frac{m(m+1)}{6}\left\{(2m-1)(2m+1)-3\right\} \\
&= \frac{m(m+1)}{6}\left(4m^2-4\right) \\
&= 4\cdot\frac{1}{6}(m-1)m(m+1)^2
\end{aligned}
$$

$(m-1)m(m+1)$ は 6 の倍数であるから，題意は示された。

[東京工業大学 2014年前期 $\boxed{2}$]

$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式 (＊) が成り立つことを示せ。

(2) すべての $t>0$ に対して上の不等式 (＊) が成り立つような a の範囲を求めよ。

---

(1) $a=2$ のとき (＊) $\Leftrightarrow \dfrac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{2}}$ …①

以下，$t>0$ とする。

① $\Leftrightarrow e^t-1 \geqq te^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow e^t-1-te^{\frac{t}{2}} \geqq 0$ である。

$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$ とおくと $f'(t)=e^t-\left(e^{\frac{t}{2}}+t\cdot\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\right)=e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}\right)$ …②

さらに，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}$ とおくと $g'(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$

$g'(t)>0$ であるから $g(t)$ は単調増加で，

$g(0)=e^0-1-\dfrac{0}{2}=0$ より $g(t)>0$

したがって，②より $f'(t)>0$ となるので $f(t)$ は単調増加で，

$f(0)=e^0-1-0e^0=0$ より $f(t)>0$ が成り立つ。

したがって，題意は示された。

(2) 以下，$t>0$ とする。

(ⅰ) $a>2$ のとき

(＊) $\Leftrightarrow e^t-1-te^{\frac{t}{a}} \geqq 0$

$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおくと

$f'(t)=e^t-\left(e^{\frac{t}{a}}+t\cdot\dfrac{1}{a}e^{\frac{t}{a}}\right)=e^{\frac{t}{a}}\left(e^{t-\frac{t}{a}}-1-\dfrac{t}{a}\right)=e^{\frac{t}{a}}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}\right)$ …③

さらに，$h(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}$ とおくと

$$h'(t)=\frac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{1}{a-1}\right)\quad \cdots④$$

であり，$a>2$ より $0<\dfrac{1}{a-1}<1$ であるから $h'(t)>0$

よって $h(t)$ は単調増加で，$h(0)=e^{\frac{a-1}{a}0}-1-\dfrac{0}{a}=0$ より $h(t)>0$

したがって，③より $f'(t)>0$ となるので $f(t)$ は単調増加で

$f(0)=e^{0}-1-0e^{\frac{0}{a}}=0$ より $f(t)>0$ が成り立つ。

（ⅱ）$1<a<2$ のとき

$\dfrac{1}{a-1}>1$ であり，④より $h'(t)=0$ すなわち $e^{\frac{a-1}{a}t}=\dfrac{1}{a-1}$ となる t がただ 1 つ存在する。

この t を t_0 とすると，$h(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↘		↗

$\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$ より $h(t)=0$ を満たす t がただ 1 つ存在する。

この t を t_1 とすると，$f(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↘		↗

$f(0)=0$ であるから，$f(t)<0$ を満たす t（>0）が存在する。

したがって，この場合は（＊）を満たさない t が存在することになる。

(1),（ⅰ),（ⅱ）より 求める a の範囲は $a\geqq 2$

[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{3}$]

1 個のさいころを投げて，出た目が 1 か 2 であれば行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 3 か 4 であれば行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 5 か 6 であれば行列 $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

そして，選んだ行列の表す 1 次変換によって xy 平面上の点 R を移すという操作を行う。

点 R は最初は点 $(0, 1)$ にあるものとし，さいころを投げて点 R を移す操作を n 回続けて行ったときに点 R が点 $(0, 1)$ にある確率を p_n，点 $(0, -1)$ にある確率を q_n とする。

(1) p_1, p_2 と q_1, q_2 を求めよ。

(2) p_n+q_n と $p_{n-1}+q_{n-1}$ の関係式を求めよ。また，p_n-q_n と $p_{n-1}-q_{n-1}$ の関係式を求めよ。

(3) p_n を n を用いて表せ。

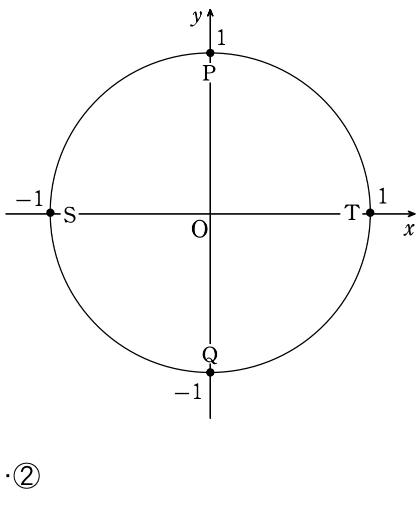
$$A=\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，

A は「原点中心，-90° の回転」，B は「原点中心，90° の回転」，C は「y 軸対称」 …①

の移動を表す 1 次変換である。

$\mathrm{P}(0, 1)$, $\mathrm{Q}(0, -1)$, $\mathrm{S}(-1, 0)$, $\mathrm{T}(1, 0)$ とおき，n 回の操作後，R が S, T にある確率を s_n, t_n とおく。



$n \geqq 2$ のとき，①より

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}s_{n-1}+\frac{1}{3}t_{n-1} \quad \cdots②$$

$$q_n=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}s_{n-1}+\frac{1}{3}t_{n-1} \quad \cdots③$$

である。

（1） $p_1=\dfrac{1}{3},\ q_1=0,\ s_1=\dfrac{1}{3},\ t_1=\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$p_2=\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}s_1+\frac{1}{3}t_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$q_2=\dfrac{1}{3}q_1+\dfrac{1}{3}s_1+\dfrac{1}{3}t_1=\dfrac{1}{3}\cdot 0+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$ となる。

（2） ②＋③より $p_n+q_n=\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\dfrac{2}{3}\left(s_{n-1}+t_{n-1}\right)$ であり，

R は P, Q, S, T のいずれかにあるから

$p_{n-1}+q_{n-1}+s_{n-1}+t_{n-1}=1 \iff s_{n-1}+t_{n-1}=1-\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)$ なので

$$\begin{aligned}p_n+q_n&=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\frac{2}{3}\left\{1-\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)\right\}\\&=-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\frac{2}{3}\quad\cdots④\end{aligned}$$

が成り立つ。

また，②－③より $p_n-q_n=\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}-q_{n-1}\right)$ …⑤

が成り立つ。

（3） $n\geqq 2$ のとき ④ $\iff p_n+q_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$p_n+q_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1+q_1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{1}{2}\quad\cdots⑥$$

⑤ $\iff p_n-q_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-q_1\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$ …⑦

（⑥＋⑦）÷２より $p_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}+\dfrac{1}{4}$ となるが，これは $n=1$ でも成り立つ。

［ 東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{4}$ ］

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点に中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を t を用いて表せ。

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ。

(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $s=\sqrt{2}t^2-2t$ より $\mathrm{P}\left(t,\ \sqrt{2}t^2-2t\right)$ であり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2-2t \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2-2t \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3t-\sqrt{2}t^2 \\ -t+\sqrt{2}t^2 \end{pmatrix}$$

であるから $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}t-t^2,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2\right)$

(2) Q の y 座標について $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2$ であり，

これと $y=a$ を連立して

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}t+t^2=a \iff t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t-a=0 \quad \cdots ①$$

①が重解を持てばよいので，判別式を D とすると

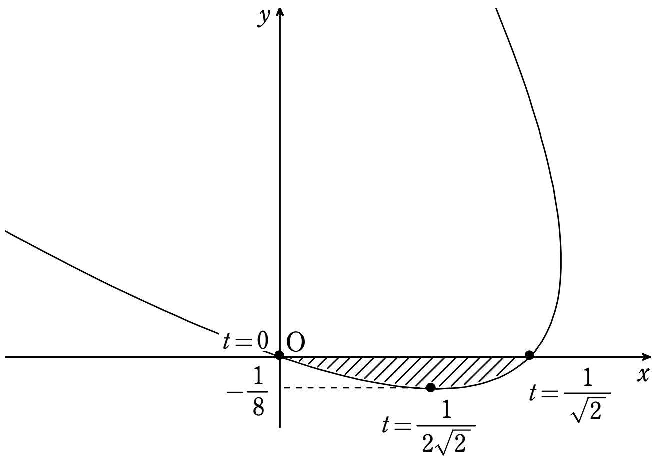
$$D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4a=0 \quad より \quad a=-\frac{1}{8}$$

(3) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2=0$ となるのは $t=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2=-\dfrac{1}{8}$ となるのは $\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=0$ より $t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である。

C の $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ を満たす x を x_+, $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす x を x_- とし,

求める体積を V とすると, $\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2t$ であるから



$$V=\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi {x_+}^2\,dy-\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi {x_-}^2\,dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} {x_-}^2\frac{dy}{dt}dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0} {x_+}^2\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+2t\right)dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{9}{2}t^2-3\sqrt{2}t^3+t^4\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+2t\right)dt$$

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2t^5-\frac{13\sqrt{2}}{2}t^4+12t^3-\frac{9\sqrt{2}}{4}t^2\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{13\sqrt{2}}{10}t^5+3t^4-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{24}-\frac{13}{40}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{120}\pi$$

[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{5}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1, 3)$ を P_0 とする。

$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k, y_k)$ とする。このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

(1) S_1 を求めよ。

(2) x_k を k を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k}$ を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

(1) $y = f(x) = x^3 + x^2 + 1$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 + 2x$ であり，

P_0 における C の接線は $y - 3 = f'(1)(x-1)$ より $y = 5x - 2$

これと C の交点の x 座標は $x^3 + x^2 + 1 = 5x - 2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+3) = 0$ より $x = 1, -3$

したがって，

$$S_1 = \int_{-3}^{1} \left\{ \left(x^3 + x^2 + 1 \right) - \left(5x - 2 \right) \right\} dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(x - 1 \right)^2 (x+3)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3(x+3) \right]_{-3}^{1} - \int_{-3}^{1} \frac{1}{3}\left(x-1 \right)^3 dx \quad \text{（部分積分）}$$

$$= -\frac{1}{12}\left[(x-1)^4 \right]_{-3}^{1}$$

$$= \frac{64}{3}$$

となる。

(2) $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ における C の接線は

$$y - \left({x_{k-1}}^3 + {x_{k-1}}^2 + 1 \right) = \left(3{x_{k-1}}^2 + 2x_{k-1} \right)(x - x_{k-1}) \Leftrightarrow y = \left(3{x_{k-1}}^2 + 2x_{k-1} \right) x - 2{x_{k-1}}^3 - {x_{k-1}}^2 + 1$$

これと C の交点の x 座標は $x^3+x^2+1=\left(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1}\right)x-2{x_{k-1}}^3-{x_{k-1}}^2+1$

$\Leftrightarrow\ (x-x_{k-1})^2(x+2x_{k-1}+1)=0$ より $x=x_{k-1},\ -2x_{k-1}-1$

x_k は x_{k-1} と異なるので $x_k=-2x_{k-1}-1$（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）…①

① $\Leftrightarrow$ $x_k+\dfrac{1}{3}=-2\left(x_{k-1}+\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できるので

$$x_k+\frac{1}{3}=(-2)^k\left(x_0+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}(-2)^k$$

したがって $x_k=\dfrac{4}{3}(-2)^k-\dfrac{1}{3}$ となるが，これは $k=0$ でも成り立つ。

(3) S_k は，k が奇数のとき $y=f(x)$ の下側，k が偶数のとき $y=f(x)$ の上側にあるが，

いずれの場合も絶対値を用いて $S_k=\left|\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)\,dx\right|$ と表せる。

$$S_k=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{3}(x-x_{k-1})^3(x-x_k)\right]_{x_{k-1}}^{x_k}-\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{1}{3}(x-x_{k-1})^3\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{12}(x-x_{k-1})^4\right]_{x_{k-1}}^{x_k}\right|$$

$$=\frac{1}{12}(x_k-x_{k-1})^4$$

$$=\frac{1}{12}\left[\left\{\frac{4}{3}(-2)^k-\frac{1}{3}\right\}-\left\{\frac{4}{3}(-2)^{k-1}-\frac{1}{3}\right\}\right]^4$$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{4}{3}\left\{-3(-2)^{k-1}\right\}\right]^4$$

$$=\frac{1}{12}\left\{4(-2)^{k-1}\right\}^4$$

$$=\frac{64}{3}\cdot16^{k-1}$$

となるので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\frac{3}{64}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \quad \cdots②$$

ここで，$0<\frac{1}{16}<1$ であるから，②の無限等比級数は収束し，

$$②=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{3}{64}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{20}$$

となる。