[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――☆

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1, 3)$ を P_0 とする。

$k = 1, 2, 3, \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k, y_k)$ とする。このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

(1) S_1 を求めよ。

(2) x_k を k を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{S_k}$ を求めよ。

☆―――☆

(1) $y = f(x) = x^3 + x^2 + 1$ とおくと，$f'(x) = 3x^2 + 2x$ であり，

P_0 における C の接線は $y - 3 = f'(1)(x-1)$ より $y = 5x - 2$

これと C の交点の x 座標は $x^3 + x^2 + 1 = 5x - 2 \iff x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$

$\iff (x-1)^2(x+3) = 0$ より $x = 1, -3$

したがって，

$$S_1 = \int_{-3}^{1} \left\{ \left(x^3 + x^2 + 1\right) - \left(5x - 2\right) \right\} dx$$

$$= \int_{-3}^{1} \left(x-1\right)^2 (x+3)\, dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3(x+3) \right]_{-3}^{1} - \int_{-3}^{1} \frac{1}{3}\left(x-1\right)^3 dx \quad \text{（部分積分）}$$

$$= -\frac{1}{12}\left[(x-1)^4 \right]_{-3}^{1}$$

$$= \frac{64}{3}$$

となる。

(2) $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1})$ における C の接線は

$$y - \left(x_{k-1}{}^3 + x_{k-1}{}^2 + 1\right) = \left(3x_{k-1}{}^2 + 2x_{k-1}\right)(x - x_{k-1}) \iff y = \left(3x_{k-1}{}^2 + 2x_{k-1}\right)x - 2x_{k-1}{}^3 - x_{k-1}{}^2 + 1$$

これとCの交点のx座標は $x^3+x^2+1=\left(3{x_{k-1}}^2+2x_{k-1}\right)x-2{x_{k-1}}^3-{x_{k-1}}^2+1$

$\Leftrightarrow\ (x-x_{k-1})^2(x+2x_{k-1}+1)=0$ より $x=x_{k-1},\ -2x_{k-1}-1$

x_k は x_{k-1} と異なるので $x_k=-2x_{k-1}-1$（$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）…①

① $\Leftrightarrow$ $x_k+\dfrac{1}{3}=-2\left(x_{k-1}+\dfrac{1}{3}\right)$ と変形できるので

$$x_k+\frac{1}{3}=(-2)^k\left(x_0+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}(-2)^k$$

したがって $x_k=\dfrac{4}{3}(-2)^k-\dfrac{1}{3}$ となるが，これは $k=0$ でも成り立つ。

(3) S_kは，kが奇数のとき $y=f(x)$ の下側，kが偶数のとき $y=f(x)$ の上側にあるが，

いずれの場合も絶対値を用いて $S_k=\left|\displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)\,dx\right|$ と表せる。

$$S_k=\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_{k-1})^2(x-x_k)\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{3}(x-x_{k-1})^3(x-x_k)\right]_{x_{k-1}}^{x_k}-\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{1}{3}(x-x_{k-1})^3\,dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{1}{12}(x-x_{k-1})^4\right]_{x_{k-1}}^{x_k}\right|$$

$$=\frac{1}{12}(x_k-x_{k-1})^4$$

$$=\frac{1}{12}\left[\left\{\frac{4}{3}(-2)^k-\frac{1}{3}\right\}-\left\{\frac{4}{3}(-2)^{k-1}-\frac{1}{3}\right\}\right]^4$$

$$=\frac{1}{12}\left[\frac{4}{3}\left\{-3(-2)^{k-1}\right\}\right]^4$$

$$=\frac{1}{12}\left\{4(-2)^{k-1}\right\}^4$$

$$=\frac{64}{3}\cdot 16^{k-1}$$

となるので，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\frac{3}{64}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^{k-1} \quad \cdots ②$$

ここで，$0<\dfrac{1}{16}<1$ であるから，②の無限等比級数は収束し，

$$②=\frac{3}{64}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{16}}=\frac{3}{64}\cdot\frac{16}{15}=\frac{1}{20}$$

となる。