[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{4}$]

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点に中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を t を用いて表せ。

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点を持つような定数 a の値を求めよ。

(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積 V を求めよ。

(1) $s=\sqrt{2}t^2-2t$ より $\mathrm{P}\left(t,\ \sqrt{2}t^2-2t\right)$ であり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2-2t \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ \sqrt{2}t^2-2t \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 3t-\sqrt{2}t^2 \\ -t+\sqrt{2}t^2 \end{pmatrix}$$

であるから $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}t-t^2,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2\right)$

(2) Q の y 座標について $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2$ であり，

これと $y=a$ を連立して

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}t+t^2=a \iff t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t-a=0 \quad \cdots ①$$

①が重解を持てばよいので，判別式を D とすると

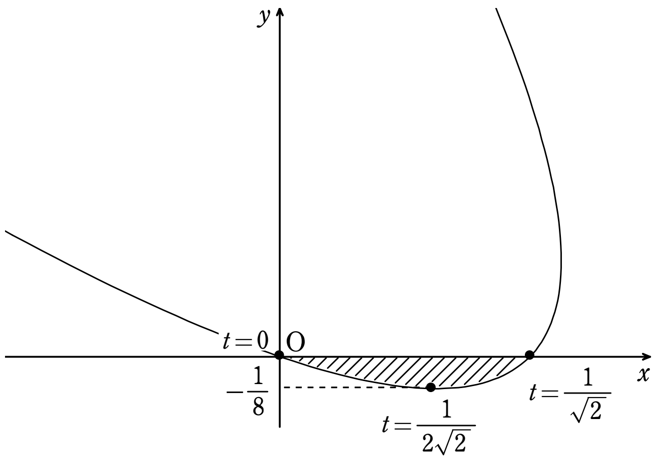
$$D=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-4a=0 \quad \text{より} \quad a=-\frac{1}{8}$$

(3) $y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2=0$ となるのは $t=0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$y=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t+t^2=-\dfrac{1}{8}$ となるのは $\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=0$ より $t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ である。

C の $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ を満たす x を x_+，$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす x を x_- とし，

求める体積を V とすると，$\dfrac{dy}{dt}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+2t$ であるから



$$V=\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi x_+{}^2\,dy-\int_{-\frac{1}{8}}^{0}\pi x_-{}^2\,dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x_-{}^2\frac{dy}{dt}dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}x_+{}^2\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}x\frac{dy}{dt}dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}t-t^2\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+2t\right)dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{9}{2}t^2-3\sqrt{2}t^3+t^4\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+2t\right)dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(2t^5-\frac{13\sqrt{2}}{2}t^4+12t^3-\frac{9\sqrt{2}}{4}t^2\right)dt$$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}t^6-\frac{13\sqrt{2}}{10}t^5+3t^4-\frac{3\sqrt{2}}{4}t^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\pi\left(\frac{1}{24}-\frac{13}{40}+\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)=\frac{11}{120}\pi$$