[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{3}$]

1 個のさいころを投げて，出た目が 1 か 2 であれば行列 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 3 か 4 であれば行列 $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を，出た目が 5 か 6 であれば行列 $C=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を選ぶ。

そして，選んだ行列の表す 1 次変換によって xy 平面上の点 R を移すという操作を行う。

点 R は最初は点 $(0, 1)$ にあるものとし，さいころを投げて点 R を移す操作を n 回続けて行ったときに点 R が点 $(0, 1)$ にある確率を p_n，点 $(0, -1)$ にある確率を q_n とする。

(1) p_1, p_2 と q_1, q_2 を求めよ。

(2) p_n+q_n と $p_{n-1}+q_{n-1}$ の関係式を求めよ。また，p_n-q_n と $p_{n-1}-q_{n-1}$ の関係式を求めよ。

(3) p_n を n を用いて表せ。

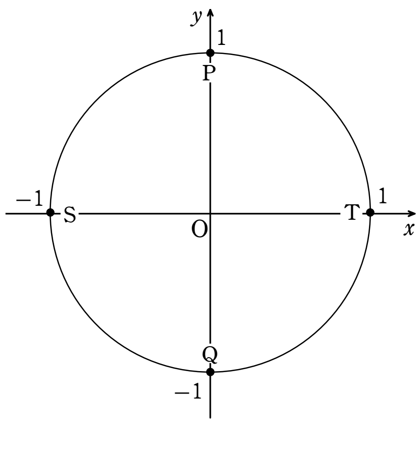
$$A=\begin{pmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix},\quad C\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

であるから，

A は「原点中心，-90° の回転」，B は「原点中心，90° の回転」，C は「y 軸対称」 …①

の移動を表す 1 次変換である。

$\mathrm{P}(0, 1)$, $\mathrm{Q}(0, -1)$, $\mathrm{S}(-1, 0)$, $\mathrm{T}(1, 0)$ とおき，n 回の操作後，R が S, T にある確率を s_n, t_n とおく。



$n \geqq 2$ のとき，①より

$$p_n=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{1}{3}s_{n-1}+\frac{1}{3}t_{n-1} \quad \cdots ②$$

$$q_n=\frac{1}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}s_{n-1}+\frac{1}{3}t_{n-1} \quad \cdots ③$$

である。

(1) $p_1=\dfrac{1}{3},\ q_1=0,\ s_1=\dfrac{1}{3},\ t_1=\dfrac{1}{3}$ であるから，

$$p_2=\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{3}s_1+\frac{1}{3}t_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$$q_2=\frac{1}{3}q_1+\frac{1}{3}s_1+\frac{1}{3}t_1=\frac{1}{3}\cdot0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$$ となる。

(2) ②+③より $p_n+q_n=\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\dfrac{2}{3}\left(s_{n-1}+t_{n-1}\right)$ であり，

R は P, Q, S, T のいずれかにあるから

$p_{n-1}+q_{n-1}+s_{n-1}+t_{n-1}=1 \iff s_{n-1}+t_{n-1}=1-\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)$ なので

$$\begin{aligned}p_n+q_n&=\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\frac{2}{3}\left\{1-\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)\right\}\\&=-\frac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}\right)+\frac{2}{3}\quad\cdots④\end{aligned}$$

が成り立つ。

また，②−③より $p_n-q_n=\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}-q_{n-1}\right)$ …⑤

が成り立つ。

(3) $n\geqq2$ のとき ④ $\iff$ $p_n+q_n-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_{n-1}+q_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$p_n+q_n-\frac{1}{2}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1+q_1-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{1}{2}\quad\cdots⑥$$

$$⑤\iff p_n-q_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(p_1-q_1\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\quad\cdots⑦$$

（⑥+⑦）÷２より $p_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}+\dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}+\dfrac{1}{4}$ となるが，これは $n=1$ でも成り立つ。