[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{2}$]

☆────────────────────────────────☆

$a>1$とし，次の不等式を考える。

$$(*) \quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1) $a=2$のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式（$*$）が成り立つことを示せ。

(2) すべての $t>0$ に対して上の不等式（$*$）が成り立つような a の範囲を求めよ。

☆────────────────────────────────☆

(1) $a=2$のとき （$*$）$\Leftrightarrow$ $\dfrac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{2}}$ …①

以下，$t>0$ とする。

① $\Leftrightarrow$ $e^t-1 \geqq te^{\frac{t}{2}}$ $\Leftrightarrow$ $e^t-1-te^{\frac{t}{2}} \geqq 0$ である。

$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$ とおくと $f'(t)=e^t-\left(e^{\frac{t}{2}}+t\cdot\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}\right)=e^{\frac{t}{2}}\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}\right)$ …②

さらに，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\dfrac{t}{2}$ とおくと $g'(t)=\dfrac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$

$g'(t)>0$ であるから $g(t)$ は単調増加で，

$g(0)=e^0-1-\dfrac{0}{2}=0$ より $g(t)>0$

したがって，②より $f'(t)>0$ となるので $f(t)$ は単調増加で，

$f(0)=e^0-1-0e^0=0$ より $f(t)>0$ が成り立つ。

したがって，題意は示された。

(2) 以下，$t>0$ とする。

（ｉ）$a>2$のとき

（$*$）$\Leftrightarrow$ $e^t-1-te^{\frac{t}{a}} \geqq 0$

$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおくと

$f'(t)=e^t-\left(e^{\frac{t}{a}}+t\cdot\dfrac{1}{a}e^{\frac{t}{a}}\right)=e^{\frac{t}{a}}\left(e^{t-\frac{t}{a}}-1-\dfrac{t}{a}\right)=e^{\frac{t}{a}}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}\right)$ …③

さらに，$h(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}$ とおくと

$$h'(t)=\frac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{1}{a}=\frac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\frac{1}{a-1}\right)\quad\cdots④$$

であり，$a>2$ より $0<\dfrac{1}{a-1}<1$ であるから $h'(t)>0$

よって $h(t)$ は単調増加で，$h(0)=e^{\frac{a-1}{a}0}-1-\dfrac{0}{a}=0$ より $h(t)>0$

したがって，③より $f'(t)>0$ となるので $f(t)$ は単調増加で

$f(0)=e^0-1-0e^{\frac{0}{a}}=0$ より $f(t)>0$ が成り立つ。

（ⅱ）$1<a<2$ のとき

$\dfrac{1}{a-1}>1$ であり，④より $h'(t)=0$ すなわち $e^{\frac{a-1}{a}t}=\dfrac{1}{a-1}$ となる t がただ 1 つ存在する。

この t を t_0 とすると，$h(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	↘		↗

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}h(t)=\infty$ より $h(t)=0$ を満たす t がただ 1 つ存在する。

この t を t_1 とすると，$f(t)$ の増減は下表に従う。

t	0	$\cdots$	t_1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	0	↘		↗

$f(0)=0$ であるから，$f(t)<0$ を満たす t（>0）が存在する。

したがって，この場合は（＊）を満たさない t が存在することになる。

(1),（ｉ),（ⅱ）より 求める a の範囲は $a\geqq 2$