[東京工業大学 2014 年前期 $\boxed{1}$]

3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\ b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

(1) a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2) a_n-b_n は 4 の倍数であることを示せ。

(1) $$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$$
$$=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k^3-k)$$
$$=\frac{1}{6}\left[\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2-\frac{(n-1)n}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)n}{4}\{(n-1)n-2\}$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{(n-1)n}{4}(n-2)(n+1)$$
$$=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)}{24}$$

ここで，n は 3 以上の奇数なので，$n=2m+1$（$m\geqq1$）とすれば，

$$a_n=a_{2m+1}$$
$$=\frac{(2m-1)2m(2m+1)(2m+2)}{24}$$
$$=\frac{m(m+1)(2m-1)(2m+1)}{6}$$
$$=\frac{m(m+1)(2m-1)\{(2(m+2)-3\}}{6}$$
$$=\frac{2m(m+1)(m+2)(2m-1)-3m(m+1)(2m-1)}{6}$$
$$=\frac{m(m+1)(m+2)(2m-1)}{3}-\frac{m(m+1)(2m-1)}{2}$$

であり，$m(m+1)(m+2)$ は連続する 3 整数の積なので 6 の倍数，

$m(m+1)$ は連続する 2 整数の積なので 2 の倍数となるから a_n は整数となる。

さらに，b_n についても

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{2m+1} \\
&= \frac{(2m+1)^2-1}{8} \\
&= \frac{4m^2+4m+1-1}{8} \\
&= \frac{m(m+1)}{2}
\end{aligned}
$$

であるから，b_n も整数となる。

（2）$a_n - b_n = a_{2m+1} - b_{2m+1}$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{m(m+1)(2m-1)(2m+1)}{6} - \frac{m(m+1)}{2} \\
&= \frac{m(m+1)}{6}\left\{(2m-1)(2m+1)-3\right\} \\
&= \frac{m(m+1)}{6}\left(4m^2-4\right) \\
&= 4\cdot\frac{1}{6}(m-1)m(m+1)^2
\end{aligned}
$$

$(m-1)m(m+1)$ は 6 の倍数であるから，題意は示された。