[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{1}$]

(1) 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α, β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍となることを示せ。

(2) 6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=5$ …① である。

数学的帰納法で示す。

(ⅰ) $n=1,\ 2$ のとき

①より

$\alpha^1+\beta^1-3^1=3-3=0=5\cdot 0$

$\alpha^2+\beta^2-3^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-9=3^2-2\cdot 5-9=-10=5\cdot(-2)$ よって成り立つ。

(ⅱ) $n=k,\ k+1$ のとき

$\alpha^k+\beta^k-3^k,\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}$ が 5 の整数倍になるとすると

$\alpha^k+\beta^k-3^k=5M,\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}=5N$ （$M,\ N$ は整数）とおける。

このとき，①より

$$\begin{aligned}\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2}&=(\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)-3^{k+2}\\&=3(5N+3^{k+1})-5(5M+3^k)-3^{k+2}\\&=3\cdot 5N-5(5M+3^k)\\&=5(5N-5M-3^k)\end{aligned}$$

$5N-5M-3^k$ は整数であるから，$n=k+2$ のときも 5 の倍数となる。

(ⅰ)(ⅱ)より 数学的帰納法によって題意は示された。

(2) 目の出方は 6^6 通りあり，これらは同様に確からしい。

ちょうど 4 種類の目が出るのは，次の 2 つの場合に限られる。

(ⅰ) 3 個とも同じ目が 1 種類あるとき

6 個のうち，出る 4 種類の選び方は ${}_6C_4$ 通り。

4 種類のうち，3 個とも同じ目が出る 1 種類の選び方は ${}_4C_1$ 通り。

その 6 個（4 種類）の並べ方は $\dfrac{6!}{3!1!1!1!}$ 通り。

したがってこの場合は ${}_6C_4 \times {}_4C_1 \times \dfrac{6!}{3!1!1!1!}$ 通りある。

(ⅱ) 2 個ずつ同じ目が 2 種類あるとき

6 個のうち，出る 4 種類の選び方は ${}_6C_4$ 通り。

4 種類のうち，2 個ずつ同じ目が出る 2 種類の選び方は ${}_4C_2$ 通り。

その 6 個（4 種類）の並べ方は $\dfrac{6!}{2!2!1!1!}$ 通り。

したがってこの場合は ${}_6C_4 \times {}_4C_2 \times \dfrac{6!}{2!2!1!1!}$ 通りある。

よって求める確率は

$$\frac{1}{6^6}\left({}_6C_4 \times {}_4C_1 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} + {}_6C_4 \times {}_4C_2 \times \frac{6!}{2!2!1!1!}\right)$$

$$= \frac{1}{6^6}(15 \times 4 \times 120 + 15 \times 6 \times 180)$$

$$= \frac{1}{6^4}(200 + 450)$$

$$= \frac{325}{648}$$

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{2}$]

☆ ☆

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A)=ad-bc,\ t(A)=a+d$ と定める。

(1) 2 次の正方行列 $A,\ B$ に対して，$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ。

(2) A の成分がすべて実数で，$A^5=E$ が成り立つとき，$x=\Delta(A)$ と $y=t(A)$ の値を求めよ。

ただし，E は 2 次の単位行列とする。

☆ ☆

(1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおく。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned}\Delta(AB)&=(ap+br)(cq+ds)-(aq+bs)(cp+dr)\\&=acpq+adps+bcqr+bdrs-acpq-adqr-bcps-bdrs\\&=adps+bcqr-adqr-bcps\\&=(ad-bc)ps-(ad-bc)qr\\&=(ad-bc)(ps-qr)\\&=\Delta(A)\Delta(B)\end{aligned}$$

(2) $A^5=E$ より $\Delta(A^5)=\Delta(E) \Leftrightarrow \Delta(A\cdot A\cdot A\cdot A\cdot A)=1$

(1)の結果を繰り返し用いると $\{\Delta(A)\}^5=1$ より $x^5=1$ を得る。

A の成分は実数だから x も実数で $x=1$ となる。

よって，ハミルトン・ケーリーの定理より $A^2-yA+E=O$

ここで，t^5 を t^2-yt+1 で割ると，

商が $t^3+yt^2+(-1+y^2)t-2y+y^3$，余りが $(1-3y^2+y^4)t+2y-y^3$ なので

$$t^5=\{t^3+yt^2+(-1+y^2)t-2y+y^3\}(t^2-yt+1)+(1-3y^2+y^4)t+2y-y^3$$

よって

$$A^5=\{A^3+yA^2+(-1+y^2)A+(-2y+y^3)E\}(A^2-yA+E)+(1-3y^2+y^4)A+(2y-y^3)E$$

$=(1-3y^2+y^4)A+(2y-y^3)E$ が成り立つ。

$A^5 = E$ より

$E = (1-3y^2+y^4)A + (2y-y^3)E \iff (1-3y^2+y^4)A = (1-2y+y^3)E$ …①

(ⅰ) $1-3y^2+y^4 = 0$ のとき

①より $1-2y+y^3 = 0 \iff (y-1)(y^2+y-1) = 0$ より $y = 1, \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ となるが

$y = 1$ は $1-3y^2+y^4 = 0$ を満たさないので不適。

$y = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ は $1-3y^2+y^4 = 0$ を満たす。

(ⅱ) $1-3y^2+y^4 \neq 0$ のとき

①より $A = \dfrac{1-2y+y^3}{1-3y^2+y^4}E$ なので $A = kE$ （k は実数）とおける。

このとき $A^5 = k^5E = E$ より $k^5 = 1$ から $k = 1$

よって $A = E$ から $y = 2$

以上，(ⅰ)(ⅱ) より $x = 1,\ y = 2, \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{3}$]

☆────────────────────☆

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

☆────────────────────☆

$f(x) = e^x - x^e$ とおくと，与式の正の解の個数は，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の $x > 0$ における共有点の個数に等しい。

よって，$y = f(x)$ のグラフを描く。

$$f'(x) = e^x - ex^{e-1}$$

$$f''(x) = e^x - e(e-1)x^{e-2}$$

$$f'''(x) = e^x - e(e-1)(e-2)x^{e-3} = e^x - \frac{e(e-1)(e-2)}{x^{3-e}}$$

である。

ここで，e^x は単調増加関数であり,

$3 - e > 0$ より $\dfrac{e(e-1)(e-2)}{x^{3-e}}$ は単調減少関数なので $-\dfrac{e(e-1)(e-2)}{x^{3-e}}$ は 単調増加関数。

よって $f'''(x)$ は単調増加関数である。

$\lim_{x\to+0} f'''(x) = -\infty,\ \lim_{x\to\infty} f'''(x) = \infty$ であることから

$f'''(x) = 0$ となる x が $x > 0$ にただ 1 つ存在する。

その x を $x = \alpha\ (> 0)$ とおく。このとき，$f''(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'''(x)$		－	0	＋
$f''(x)$		↘		↗

次に，$f''(x) = e^x - e(e-1)x^{e-2}$ において $e - 2 > 0$ より

$\lim_{x\to+0} f''(x) = 1\ (> 0)$，$f''(\alpha) < f''(1) = e - e(e-1) = -(e-2)\ (< 0)$，$\lim_{x\to\infty} f''(x) = \infty$

であることから，$f''(x) = 0$ となる x が $x > 0$ に 2 つ存在する。

その x を $x = \beta, \gamma\ (0 < \beta < \alpha < 1 < \gamma)$ とおく。このとき，$f'(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$		↗		↘		↗

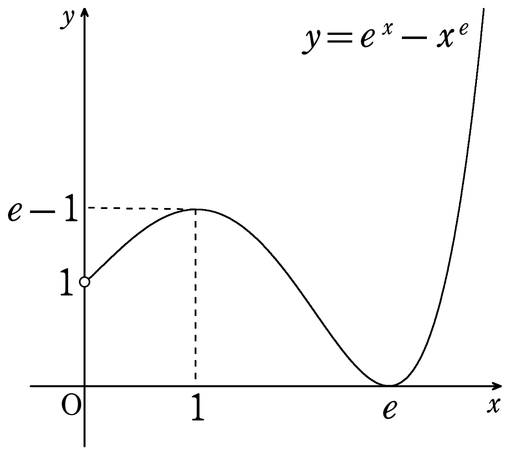
さらに，$f'(x)$ について，$\lim_{x\to+0} f'(x)=1\ (>0)$ と増減表より $f'(x)=0$ となる x は高々2個で，

実際，$f'(1)=e-e=0$，$f'(e)=e^e-e\cdot e^{e-1}=0$ より $f'(x)=0$ となるのは $x=1, e$ のとき。

したがって，$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗		↘		↗

$\lim_{x\to+0} f(x)=1$，$f(1)=e-1$，$f(e)=0$，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ なので，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



したがって，求める正の解の個数は

$k<0$ のとき 0個

$k=0,\ k>e-1$ のとき 1個

$0<k\leqq 1,\ k=e-1$ のとき 2個

$1<k<e-1$ のとき 3個

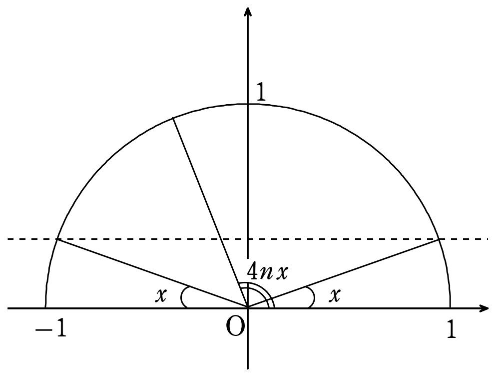
[注] $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ については

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x^e\right)=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\dfrac{x^e}{e^x}\right)$ であり $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^e}{e^x}=0$ を既知として利用した。

既知としないならば $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ を証明すればよい。

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{4}$]

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たすのは

m を整数として $x + 2m\pi \leqq 4nx \leqq (\pi - x) + 2m\pi$ となるとき。

これを x について解くと

$\frac{2m}{4n-1}\pi \leqq x \leqq \frac{2m+1}{4n+1}\pi$ …①となる。

ここで，$0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より①がどんな m の値に対して存在するか考える。

$\frac{2m+1}{4n+1}\pi = \frac{1}{2}\pi$ のときは $m = n - \frac{1}{4}$ であるが，m は整数なので

m のとりうる値の範囲は 0 から $n-1$ までの整数となる。

ある m に対しての x の区間の長さを d_m とすると

$$d_m = \frac{2m+1}{4n+1}\pi - \frac{2m}{4n-1}\pi = \frac{-4m+4n-1}{(4n-1)(4n+1)}\pi$$

よって
$$S_n = \sum_{m=0}^{n-1} d_m = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{-4m+4n-1}{(4n-1)(4n+1)}\pi$$
$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{-4m}{(4n-1)(4n+1)}\pi + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{4n+1}\pi$$
$$= \frac{-4}{(4n-1)(4n+1)}\pi \sum_{m=0}^{n-1} m + \frac{1}{4n+1}\pi \sum_{m=0}^{n-1} 1$$
$$= \frac{-4}{(4n-1)(4n+1)}\pi \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4n+1}\pi \cdot n$$
$$= \frac{-2n(n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\pi + \frac{n}{4n+1}\pi$$
$$= \frac{2n^2+n}{16n^2-1}\pi$$
$$= \frac{2+\frac{1}{n}}{16-\frac{1}{n^2}}\pi$$

よって $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{8}\pi$ となる。

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{5}$]

$a,\ b$ を正の実数とし，円 $C_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$ と楕円 $C_2 : x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。

(1) C_1 が C_2 に内接するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) $b = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。

---

(1) C_1 の中心 $(a,\ 0)$ と $C_2 : x^2 + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ との距離を d とすると，

$$d^2 = (x-a)^2 + y^2$$

$$= (x-a)^2 + b^2(1-x^2)$$

$$= (1-b^2)x^2 - 2ax + a^2 + b^2$$

ここで， $f(x) = (1-b^2)x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ とおく。

求めるべき条件は C_2 の存在範囲 $-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値が，

C_1 の半径の 2 乗である a^2 と等しくなるような $a,\ b$ の条件である。

（ｉ）$1-b^2 = 0$ すなわち $b = 1$（>0）のとき

$a > 0$ であるから $f(x)$ は x の減少関数であり， $x = 1$ で最小となる。

よって $f(1) = -2a + a^2 + 1$ よりこれが a^2 と等しくなるとき

$-2a + a^2 + 1 = a^2$ より $a = \dfrac{1}{2}$

（ⅱ）$1-b^2 < 0$ すなわち（$b > 0$ より）$b > 1$ のとき

$$f(x) = (1-b^2)\left(x - \frac{a}{1-b^2}\right)^2 + a^2 + b^2 - \frac{a^2}{1-b^2}$$ と変形でき，

$y = f(x)$ は上に凸の放物線で，軸 $x = \dfrac{a}{1-b^2} < 0$ より

$x = 1$ のときに最小値をとる。

よって条件は $a = \dfrac{1}{2}$

（ⅲ）$1-b^2>0$　すなわち（$b>0$より）$0<b<1$　のとき

$y=f(x)$　は下に凸の放物線で，軸$x=\dfrac{a}{1-b^2}>0$　より

（ⅲ－ｉ）$\dfrac{a}{1-b^2} \geqq 1$　のとき

$x=1$　で最小となるから条件は　$a=\dfrac{1}{2}$　であり，

このとき　$\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{1}{2(1-b^2)} \geqq 1$　より　$b^2 \geqq \dfrac{1}{2}$

$b>0$　であるから　$b \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$　を得る。

（ⅲ－ⅱ）$\dfrac{a}{1-b^2} \leqq 1$　のとき

$x=\dfrac{a}{1-b^2}$　で最小となるから

$\dfrac{a}{1-b^2} \leqq 1$　…①　かつ　$a^2+b^2-\dfrac{a^2}{1-b^2}=a^2$　…②

②より　$a^2=b^2(1-b^2)$　すなわち　$a=b\sqrt{1-b^2}$　で，

①より　$\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{b\sqrt{1-b^2}}{1-b^2} \leqq 1$　から　$b \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって条件は　$a=b\sqrt{1-b^2}$　かつ　$b \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上(ｉ)(ⅱ)(ⅲ)より，求める条件は

「$a=\dfrac{1}{2}$　かつ　$b \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$」または「$a=b\sqrt{1-b^2}$　かつ　$b \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$」

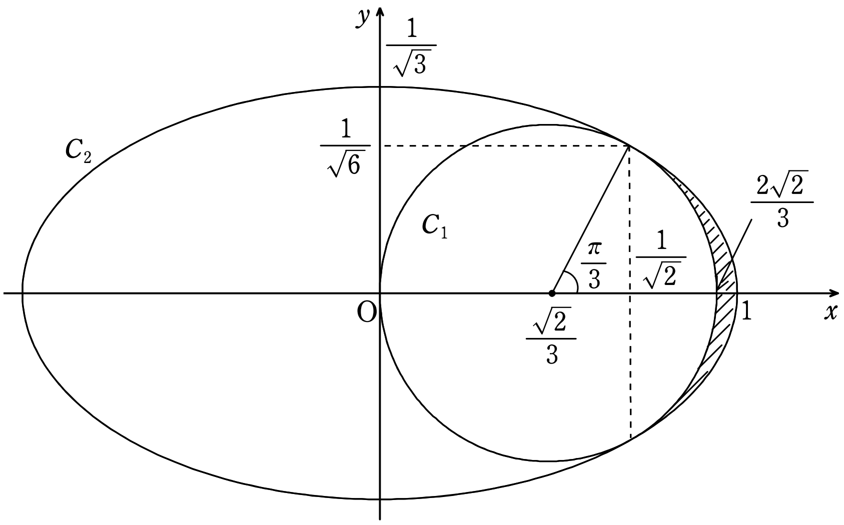
⑵　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　なので，このとき　$a=b\sqrt{1-b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　となる。

場合分けの(ⅲ)の考察より　$p=\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　である。

このとき，$C_2: x^2+3y^2=1$　なので，$q>0$　から　$q=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

よって　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(3) (2)の条件のもとで，C_1, C_2 を図示すると下図のようになる。



求める面積は

$$2\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}\ dx-\left\{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right]\ \cdots③$$

である。

ここで，$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}\ dx$ について $x=\cos\theta$ と置換すると

$dx=-\sin\theta\, d\theta$，$x:\frac{1}{\sqrt{2}}\to 1$ のとき $\theta:\frac{\pi}{4}\to 0$ なので，

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}\ dx=\sqrt{\frac{1}{3}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sqrt{(1-\cos^2\theta)}\,(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\, d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

したがって

$$③=2\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left\{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right]$$

$$=\frac{9\sqrt{3}-8}{108}\pi-\frac{\sqrt{3}}{9}$$ となる。