[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{1}$]

(1) 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α, β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍となることを示せ。

(2) 6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{2}$]

2 次の正方行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\Delta(A)=ad-bc,\ t(A)=a+d$ と定める。

(1) 2 次の正方行列 $A,\ B$ に対して，$\Delta(AB)=\Delta(A)\Delta(B)$ が成り立つことを示せ。

(2) A の成分がすべて実数で，$A^5=E$ が成り立つとき，$x=\Delta(A)$ と $y=t(A)$ の値を求めよ。

ただし，E は 2 次の単位行列とする。

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{4}$]

☆ ☆

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{5}$]

☆ ☆

$a,\ b$を正の実数とし，円$C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$と楕円$C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$を考える。

(1) C_1がC_2に内接するための$a,\ b$の条件を求めよ。

(2) $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とし，C_1がC_2に内接しているとする。このとき，第 1 象限におけるC_1とC_2の接点の座標$(p,\ q)$を求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，$x \geqq p$の範囲において，C_1とC_2で囲まれた部分の面積を求めよ。

☆ ☆