**[ 東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{5}$ ]**

☆―――☆

$a,\ b$ を正の実数とし，円 $C_1:(x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

(1) $C_1$ が $C_2$ に内接するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) $b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，$C_1$ が $C_2$ に内接しているとする。このとき，第 1 象限における $C_1$ と $C_2$ の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，$C_1$ と $C_2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

☆―――☆

(1) $C_1$ の中心 $(a,\ 0)$ と $C_2:x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ との距離を $d$ とすると，

$$d^2=(x-a)^2+y^2$$
$$=(x-a)^2+b^2(1-x^2)$$
$$=(1-b^2)x^2-2ax+a^2+b^2$$

ここで，$f(x)=(1-b^2)x^2-2ax+a^2+b^2$ とおく。

求めるべき条件は $C_2$ の存在範囲 $-1\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値が，

$C_1$ の半径の 2 乗である $a^2$ と等しくなるような $a,\ b$ の条件である。

（ⅰ）$1-b^2=0$ すなわち $b=1$（$>0$）のとき

$a>0$ であるから $f(x)$ は $x$ の減少関数であり，$x=1$ で最小となる。

よって $f(1)=-2a+a^2+1$ よりこれが $a^2$ と等しくなるとき

$-2a+a^2+1=a^2$ より $a=\dfrac{1}{2}$

（ⅱ）$1-b^2<0$ すなわち（$b>0$ より）$b>1$ のとき

$$f(x)=(1-b^2)\left(x-\frac{a}{1-b^2}\right)^2+a^2+b^2-\frac{a^2}{1-b^2}$$ と変形でき，

$y=f(x)$ は上に凸の放物線で，軸 $x=\dfrac{a}{1-b^2}<0$ より

$x=1$ のときに最小値をとる。

よって条件は $a=\dfrac{1}{2}$

（iii）$1-b^2>0$　すなわち（$b>0$ より）$0<b<1$　のとき

$y=f(x)$　は下に凸の放物線で，軸 $x=\dfrac{a}{1-b^2}>0$　より

（iii－ｉ）$\dfrac{a}{1-b^2}\geqq 1$　のとき

$x=1$　で最小となるから条件は　$a=\dfrac{1}{2}$　であり，

このとき　$\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{1}{2(1-b^2)}\geqq 1$　より　$b^2\geqq\dfrac{1}{2}$

$b>0$　であるから　$b\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　を得る。

（iii－ii）$\dfrac{a}{1-b^2}\leqq 1$　のとき

$x=\dfrac{a}{1-b^2}$　で最小となるから

$\dfrac{a}{1-b^2}\leqq 1$　…①　かつ　$a^2+b^2-\dfrac{a^2}{1-b^2}=a^2$　…②

②より　$a^2=b^2(1-b^2)$　すなわち　$a=b\sqrt{1-b^2}$　で，

①より　$\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{b\sqrt{1-b^2}}{1-b^2}\leqq 1$　から　$b\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって条件は　$a=b\sqrt{1-b^2}$　かつ　$b\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上(ｉ)(ii)(iii)より，求める条件は

「$a=\dfrac{1}{2}$　かつ　$b\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$」または「$a=b\sqrt{1-b^2}$　かつ　$b\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$」

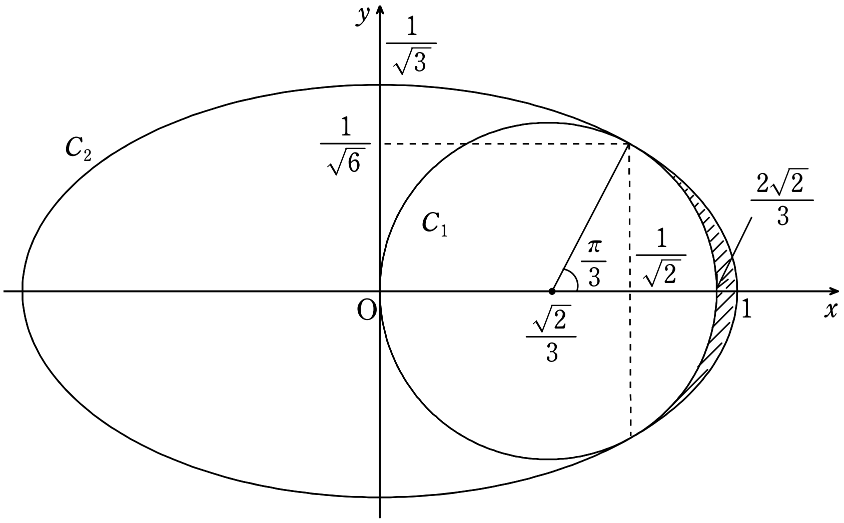
⑵　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　なので，このとき　$a=b\sqrt{1-b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　となる。

場合分けの(iii)の考察より　$p=\dfrac{a}{1-b^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　である。

このとき，$C_2: x^2+3y^2=1$　なので，$q>0$　から　$q=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

よって　$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)$

(3) (2)の条件のもとで，$C_1$, $C_2$ を図示すると下図のようになる。




求める面積は

$$2\left[\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}\ dx-\left\{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right]\ \cdots③$$

である。

ここで，$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}\ dx$ について $x=\cos\theta$ と置換すると

$dx=-\sin\theta\,d\theta$，$x:\frac{1}{\sqrt{2}}\to 1$ のとき $\theta:\frac{\pi}{4}\to 0$ なので，

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\sqrt{\frac{1}{3}(1-x^2)}\ dx=\sqrt{\frac{1}{3}}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\sqrt{(1-\cos^2\theta)}\,(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta$$

$$=\sqrt{\frac{1}{3}}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}}\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

したがって

$$③=2\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left\{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\right\}\right]$$

$$=\frac{9\sqrt{3}-8}{108}\pi-\frac{\sqrt{3}}{9}$$ となる。