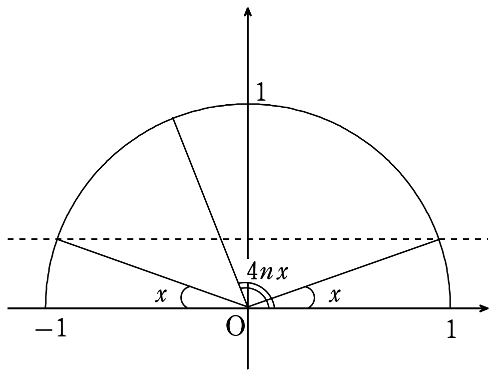
[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{4}$]

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を

S_n とする。このとき，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たすのは

m を整数として $x + 2m\pi \leqq 4nx \leqq (\pi - x) + 2m\pi$ となるとき。

これを x について解くと

$\dfrac{2m}{4n-1}\pi \leqq x \leqq \dfrac{2m+1}{4n+1}\pi$ …①となる。

ここで，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より①がどんな m の値に対して存在するか考える。

$\dfrac{2m+1}{4n+1}\pi = \dfrac{1}{2}\pi$ のときは $m = n - \dfrac{1}{4}$ であるが，m は整数なので

m のとりうる値の範囲は 0 から $n-1$ までの整数となる。

ある m に対しての x の区間の長さを d_m とすると

$$d_m = \frac{2m+1}{4n+1}\pi - \frac{2m}{4n-1}\pi = \frac{-4m+4n-1}{(4n-1)(4n+1)}\pi$$

よって $S_n = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} d_m = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{-4m+4n-1}{(4n-1)(4n+1)}\pi$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{-4m}{(4n-1)(4n+1)}\pi + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{4n+1}\pi$$

$$= \frac{-4}{(4n-1)(4n+1)}\pi \sum_{m=0}^{n-1} m + \frac{1}{4n+1}\pi \sum_{m=0}^{n-1} 1$$

$$= \frac{-4}{(4n-1)(4n+1)}\pi \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{4n+1}\pi \cdot n$$

$$= \frac{-2n(n-1)}{(4n-1)(4n+1)}\pi + \frac{n}{4n+1}\pi$$

$$= \frac{2n^2+n}{16n^2-1}\pi$$

$$= \frac{2+\frac{1}{n}}{16-\frac{1}{n^2}}\pi$$ よって $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{8}\pi$ となる。