[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{3}$]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x) = e^x - x^e$ とおくと，与式の正の解の個数は，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の $x > 0$ における共有点の個数に等しい。

よって，$y = f(x)$ のグラフを描く。

$$f'(x) = e^x - ex^{e-1}$$

$$f''(x) = e^x - e(e-1)x^{e-2}$$

$$f'''(x) = e^x - e(e-1)(e-2)x^{e-3} = e^x - \frac{e(e-1)(e-2)}{x^{3-e}}$$

である。

ここで，e^x は単調増加関数であり，

$3 - e > 0$ より $\dfrac{e(e-1)(e-2)}{x^{3-e}}$ は単調減少関数なので $-\dfrac{e(e-1)(e-2)}{x^{3-e}}$ は 単調増加関数。

よって $f'''(x)$ は単調増加関数である。

$\lim\limits_{x \to +0} f'''(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to \infty} f'''(x) = \infty$ であることから

$f'''(x) = 0$ となる x が $x > 0$ にただ 1 つ存在する。

その x を $x = \alpha\ (> 0)$ とおく。このとき，$f''(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		↘		↗

次に，$f''(x) = e^x - e(e-1)x^{e-2}$ において $e - 2 > 0$ より

$\lim\limits_{x \to +0} f''(x) = 1\ (> 0)$，$f''(\alpha) < f''(1) = e - e(e-1) = -(e-2)\ (< 0)$，$\lim\limits_{x \to \infty} f''(x) = \infty$

であることから，$f''(x) = 0$ となる x が $x > 0$ に 2 つ存在する。

その x を $x = \beta, \gamma\ (0 < \beta < \alpha < 1 < \gamma)$ とおく。このとき，$f'(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	γ	$\cdots$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

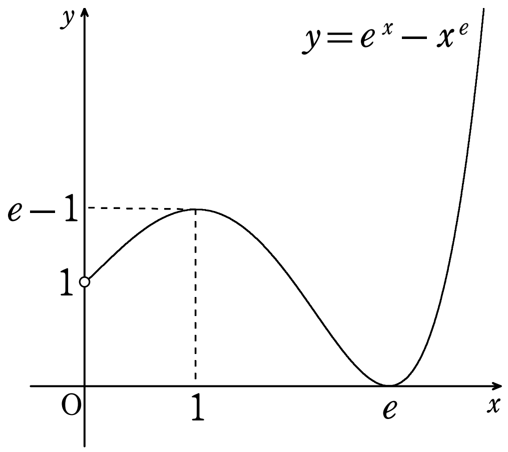
さらに，$f'(x)$ について，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)=1\ (>0)$ と増減表より $f'(x)=0$ となる x は高々2 個で，

実際，$f'(1)=e-e=0$，$f'(e)=e^e-e\cdot e^{e-1}=0$ より $f'(x)=0$ となるのは $x=1,\ e$ のとき。

したがって，$f(x)$ の増減は下表に従う。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=1$，$f(1)=e-1$，$f(e)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ なので，$y=f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



したがって，求める正の解の個数は

$k<0$ のとき 0 個

$k=0,\ k>e-1$ のとき 1 個

$0<k\leqq 1,\ k=e-1$ のとき 2 個

$1<k<e-1$ のとき 3 個

[注] $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ については

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(e^x-x^e\right)=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)$ であり $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}=0$ を既知として利用した。

既知としないならば $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ を証明すればよい。