



2 次の正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  に対して,  $\Delta(A) = ad - bc$ ,  $t(A) = a + d$  と定める。

(1) 2 次の正方行列  $A, B$  に対して,  $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$  が成り立つことを示せ。

(2)  $A$  の成分がすべて実数で,  $A^5 = E$  が成り立つとき,  $x = \Delta(A)$  と  $y = t(A)$  の値を求めよ。

ただし,  $E$  は 2 次の単位行列とする。



(1)  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  とおく。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \Delta(AB) &= (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) \\ &= acpq + adps + bcqr + bdrs - acpq - adqr - bcps - bdrs \\ &= adps + bcqr - adqr - bcps \\ &= (ad - bc)ps - (ad - bc)qr \\ &= (ad - bc)(ps - qr) \\ &= \Delta(A)\Delta(B) \end{aligned}$$

(2)  $A^5 = E$  より  $\Delta(A^5) = \Delta(E)$      $\Delta(A \cdot A \cdot A \cdot A \cdot A) = 1$

(1)の結果を繰り返し用いると  $\{\Delta(A)\}^5 = 1$  より  $x^5 = 1$  を得る。

$A$  の成分は実数だから  $x$  も実数で  $x = 1$  となる。

よって, ハミルトン・ケーリーの定理より  $A^2 - yA + E = O$

ここで,  $t^5$  を  $t^2 - yt + 1$  で割ると,

商が  $t^3 + yt^2 + (-1 + y^2)t - 2y + y^3$ , 余りが  $(1 - 3y^2 + y^4)t + 2y - y^3$  なので

$$t^5 = \{t^3 + yt^2 + (-1 + y^2)t - 2y + y^3\} (t^2 - yt + 1) + (1 - 3y^2 + y^4)t + 2y - y^3$$

よって

$$\begin{aligned} A^5 &= \{A^3 + yA^2 + (-1 + y^2)A + (-2y + y^3)E\} (A^2 - yA + E) + (1 - 3y^2 + y^4)A + (2y - y^3)E \\ &= (1 - 3y^2 + y^4)A + (2y - y^3)E \text{ が成り立つ。} \end{aligned}$$

$A^5 = E$  より

$$E = (1-3y^2 + y^4)A + (2y - y^3)E \quad (1-3y^2 + y^4)A = (1-2y + y^3)E \quad \dots$$

( )  $1-3y^2 + y^4 = 0$  のとき

$$\text{より } 1-2y + y^3 = 0 \quad (y-1)(y^2 + y - 1) = 0 \quad \text{より } y = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{となるが}$$

$y = 1$  は  $1-3y^2 + y^4 = 0$  を満たさないので不適。

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \text{は } 1-3y^2 + y^4 = 0 \quad \text{を満たす。}$$

( )  $1-3y^2 + y^4 \neq 0$  のとき

$$\text{より } A = \frac{1-2y+y^3}{1-3y^2+y^4} E \quad \text{なので } A = kE \quad (k \text{ は実数}) \quad \text{とおける。}$$

$$\text{このとき } A^5 = k^5 E = E \quad \text{より } k^5 = 1 \quad \text{から } k = 1$$

$$\text{よって } A = E \quad \text{から } y = 2$$

$$\text{以上, ( ) ( ) より } x = 1, y = 2, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$