[東京工業大学 2013 年前期 $\boxed{1}$]

(1) 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α, β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍となることを示せ。

(2) 6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。

(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta=3, \alpha\beta=5$ …① である。

数学的帰納法で示す。

(ⅰ) $n=1, 2$ のとき

①より

$\alpha^1+\beta^1-3^1=3-3=0=5\cdot 0$

$\alpha^2+\beta^2-3^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-9=3^2-2\cdot 5-9=-10=5\cdot(-2)$ よって成り立つ。

(ⅱ) $n=k, k+1$ のとき

$\alpha^k+\beta^k-3^k, \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}$ が 5 の整数倍になるとすると

$\alpha^k+\beta^k-3^k=5M, \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}=5N$ （M, N は整数）とおける。

このとき，①より

$$
\begin{aligned}
\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2} &= (\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)-3^{k+2} \\
&= 3(5N+3^{k+1})-5(5M+3^k)-3^{k+2} \\
&= 3\cdot 5N-5(5M+3^k) \\
&= 5(5N-5M-3^k)
\end{aligned}
$$

$5N-5M-3^k$ は整数であるから，$n=k+2$ のときも 5 の倍数となる。

(ⅰ)(ⅱ)より 数学的帰納法によって題意は示された。

(2) 目の出方は 6^6 通りあり，これらは同様に確からしい。

ちょうど 4 種類の目が出るのは，次の 2 つの場合に限られる。

(ⅰ) 3 個とも同じ目が 1 種類あるとき

6 個のうち，出る 4 種類の選び方は ${}_6C_4$ 通り。

4 種類のうち，3 個とも同じ目が出る 1 種類の選び方は ${}_4C_1$ 通り。

その 6 個（4 種類）の並べ方は $\dfrac{6!}{3!1!1!1!}$ 通り。

したがってこの場合は ${}_6C_4 \times {}_4C_1 \times \dfrac{6!}{3!1!1!1!}$ 通りある。

(ⅱ) 2 個ずつ同じ目が 2 種類あるとき

6 個のうち，出る 4 種類の選び方は ${}_6C_4$ 通り。

4 種類のうち，2 個ずつ同じ目が出る 2 種類の選び方は ${}_4C_2$ 通り。

その 6 個（4 種類）の並べ方は $\dfrac{6!}{2!2!1!1!}$ 通り。

したがってこの場合は ${}_6C_4 \times {}_4C_2 \times \dfrac{6!}{2!2!1!1!}$ 通りある。

よって求める確率は

$$\frac{1}{6^6}\left({}_6C_4 \times {}_4C_1 \times \frac{6!}{3!1!1!1!} + {}_6C_4 \times {}_4C_2 \times \frac{6!}{2!2!1!1!}\right)$$

$$= \frac{1}{6^6}(15 \times 4 \times 120 + 15 \times 6 \times 180)$$

$$= \frac{1}{6^4}(200 + 450)$$

$$= \frac{325}{648}$$