[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{1}$]

☆ ☆

(1) 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする。

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。

(2) 1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ。

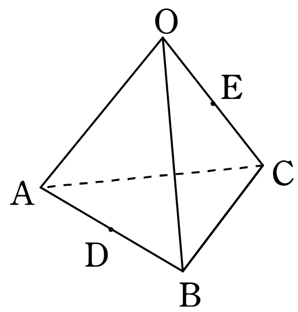
☆ ☆

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

$$=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\quad\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1\right)$$



(2) 目の積が 10 の倍数になるのは，『「偶数の目が出る」かつ「5 の目が出る」』ときである。

この余事象は，『「偶数の目が出ない」または「5 の目が出ない」』である。

A ：偶数の目が出ない

B ：5 の目が出ない

とすると，求める確率は $1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$

$$=1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}$$

$$=1-\left\{\frac{27+125-8}{216}\right\}$$

$$=1-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

〔別解〕すべて書き出す。

10：（1，2，5）→ 6 通り

20：（1，4，5）→ 6 通り，（2，2，5）→ 3 通り

30：（2，3，5）→ 6 通り，（1，5，6）→ 6 通り

40：（2，4，5）→ 6 通り

50：（2，5，5）→ 3 通り

60：（2，5，6）→ 6 通り，（3，4，5）→ 6 通り

80：（4，4，5）→ 3 通り

90：（3，5，6）→ 6 通り

100：（4，5，5）→ 3 通り

120：（4，5，6）→ 6 通り

150：（5，5，6）→ 3 通り

180：（5，6，6）→ 3 通り

これらの合計は 72 通りであるから，求める確率は $\dfrac{72}{6^3}=\dfrac{1}{3}$

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{2}$]

(1) $\log_{10} 3 = 0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ。

(2) 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $\left[\sqrt{n}\right]$ が n の約数となるものは何個あるか。

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{99}$

$$= \frac{1-3^{100}}{1-3}$$

$$= \frac{3^{100}-1}{2}$$

ここで，3^{100} の桁数を N とすると

$$10^{N-1} \leqq 3^{100} < 10^N$$

$$N-1 \leqq \log_{10} 3^{100} < N$$

$$N-1 \leqq 100 \cdot \log_{10} 3 < N$$

$$N-1 \leqq 47.71 < N$$

これを満たす整数 N は 48 であるから，3^{100} は 48 桁。

また，3^{100} の首位の数字を a とおくと

$$a \times 10^{47} \leqq 3^{100}$$

$$\log_{10}\left(a \times 10^{47}\right) \leqq \log_{10} 3^{100}$$

$$\log_{10} a \leqq 0.71$$

$\log_{10} 3 = 0.4771$ であるから a は 3 以上である。

よって $\dfrac{3^{100}-1}{2}$ は，3^{100} の一の位の数が 0 ではないから $3^{100}-1$ でも 48 桁のままであり，首位の数字が 1 ではないので，2 で割っても桁数は変わらないことなる。

よって $\dfrac{3^{100}-1}{2}$ の桁数は 48。

(2) $\left[\sqrt{n}\right]=k$ とおくと，$k \leqq \sqrt{n} < k+1$

2 乗して $k^2 \leqq n < (k+1)^2 \iff k^2 \leqq n < k^2+2k+1$

k^2+2k+1 は整数なので $k^2 \leqq n \leqq k^2+2k$ …①

$\left(\left[\sqrt{n}\right]=\right) k$ が n の約数になるということは，n が k の倍数になるということであり，

①の中で n が k の倍数になっているものは $k^2,\ k^2+k,\ k^2+2k$ の 3 個ある。

$n \leqq 10000$ …② であるとき，$1 \leqq k \leqq 100$ であり，

$1 \leqq k \leqq 99$ に対しては 3 個ずつ，$k=100$ の対しては 1 個が②を満たす。

よって求める個数は $99\times3+1=298$

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

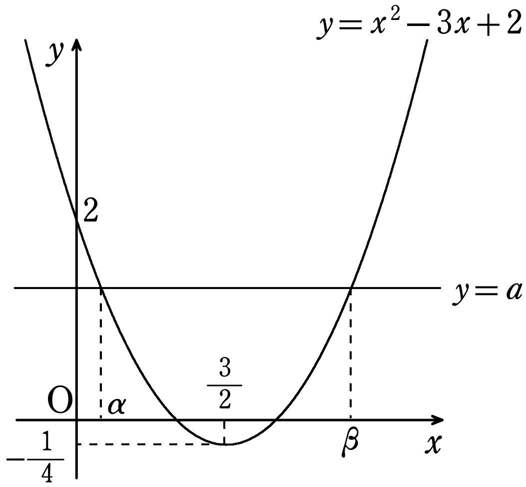
3 次関数 $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフを C，直線 $y=ax$ を ℓ とする。

(1) C と ℓ が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲内にあるとき，C と ℓ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。

$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

☆ ☆



(1) C と ℓ を連立して $x^3-3x^2+2x=ax$

これが $x=0$ 以外の解をもつような a の範囲を求めればよい。

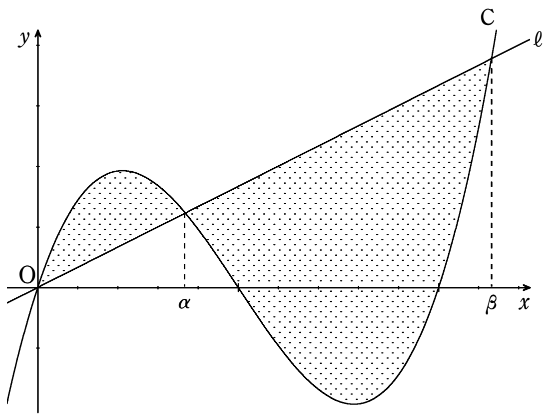
$x\neq 0$ より $x^2-3x+2=a$ …①

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=a$$

であるから $a\geqq -\frac{1}{4}$

(2) ①の 2 解を α,β $(\alpha\leqq\beta)$ とおく。

(i) $-\frac{1}{4}\leqq a\leqq 2$ のとき



$0\leqq\alpha\leqq\beta$ であり，$f(x)=x^3-3x^2+2x$ とおくと

$$S(a)=\int_0^{\alpha}\{f(x)-ax\}\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}\{ax-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx-a\int_0^{\alpha}x\,dx+a\int_{\alpha}^{\beta}x\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\,dx$$

α,β は a の関数であるから，両辺を a で微分すると

$$S'(a)=f(\alpha)\frac{d\alpha}{da}-\left(1\cdot\int_0^{\alpha}x\,dx+a\cdot\alpha\frac{d\alpha}{da}\right)+\left\{1\cdot\int_{\alpha}^{\beta}x\,dx+a\cdot\left(\beta\frac{d\beta}{da}-\alpha\frac{d\alpha}{da}\right)\right\}$$

$$-\left\{f(\beta)\frac{d\beta}{da}-f(\alpha)\frac{d\alpha}{da}\right\}$$

$$=2\{f(\alpha)-a\alpha\}\frac{d\alpha}{da}-\{f(\beta)-a\beta\}\frac{d\beta}{da}-\int_0^{\alpha}x\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}x\,dx$$

α,β は，$f(x)=ax$ の 2 解であるから $f(\alpha)-a\alpha=f(\beta)-a\beta=0$ なので

$$S'(a)=-\int_0^{\alpha}x\,dx+\int_{\alpha}^{\beta}x\,dx=-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\alpha}+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\alpha}^{\beta}=\frac{1}{2}\beta^2-\alpha^2=\frac{1}{2}(\beta+\sqrt{2}\alpha)(\beta-\sqrt{2}\alpha)$$

(1)のグラフより，a が $-\dfrac{1}{4}$ から2まで増加するとき，

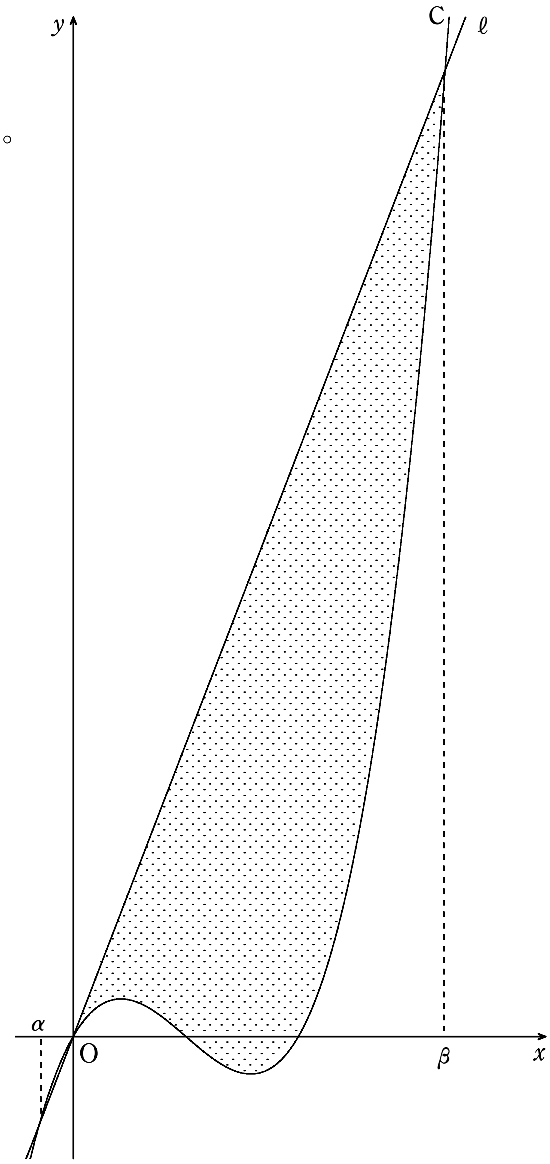
α は $\dfrac{3}{2}$ から0まで減少し，β は $\dfrac{3}{2}$ から3まで増加するから，$\beta=\sqrt{2}\alpha$ …②

となるときの a の値を a_0 とすると，$S(a)$ の増減は下表に従う。

a	$-\dfrac{1}{4}$	$\cdots$	a_0	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

(ii) $a\geqq 2$ のとき

囲まれる面積 $S(a)$ は a の増加関数であることは図より明らか。



よって(ｉ)のときに最小値をとることになり，

それは①の2解 α,β が②を満たすときである。

解と係数の関係より $\alpha+\beta=3$ …③，$\alpha\beta=2-a$ …④

②，③より $\alpha=3(\sqrt{2}-1)$

これと④より $a=2-\alpha\beta$

$$=2-\sqrt{2}\alpha^2$$

$$=2-\sqrt{2}\{3(\sqrt{2}-1)\}^2$$

$$=38-27\sqrt{2}$$

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{4}$]

n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\ a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき, $\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。

(1) $$a_2=-\frac{1}{n+2}+na_1$$

$$=-\frac{1}{n+2}+n\cdot\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_3=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}(a_1+a_2)$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}$$

$$=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

(2) (1)より $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ …① と推定できるので，この推測が正しいことを数学的帰納法で示す。

[Ⅰ] $k=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{(n+1-1)(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ より①は成り立つ。

[Ⅱ] $k \leqq m$ のとき，①が成り立つとする。

このとき，
$$
\begin{aligned}
a_{m+1}&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{n+m}\\
&=\frac{1}{(n+m-1)(n+m)}
\end{aligned}
$$

より $k=m+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，すべての自然数 k に対し，①は成り立つ。

したがって求める一般項は $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$

(3) $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ であるから $\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ が成り立つ。

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}<b_n<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{k-1}{n}}$$

である。この式の左辺と右辺はともに $n\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$ に収束する。

よって，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{5}$]

☆―――☆

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする。原点 O(0, 0) と異なる任意の 2 点 P, Q に対して $\dfrac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OQ}'}{\mathrm{OQ}}$ が成り立つ。ただし，P′, Q′ はそれぞれ P, Q の f による像を表す。

(1) $a^2+c^2=b^2+d^2$ を示せ。

(2) 1 次変換 f により，点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(-4, 0)$ に移るとき，A を求めよ。

☆―――☆

$\vec{u}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \vec{v}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくと，P(x, y) の f による像 P′ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

となり，原点と異なる任意の点 P に対し，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}'}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}=\frac{|x\vec{u}+y\vec{v}|^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{|\vec{u}|^2\ x^2+|\vec{v}|^2\ y^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})xy}{x^2+y^2} \quad \cdots ①$$

は一定値になる。

(1) $(x, y)=(1, 0)$ のとき ①$=|\vec{u}|^2$ …②，$(x, y)=(0, 1)$ のとき ①$=|\vec{v}|^2$

であるから $|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2$ …③

よって $a^2+c^2=b^2+d^2$

(2) $(x, y)=(1, 1)$ のとき

① $=\dfrac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})}{2}=|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}$ $(\because |\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2)$

であるから，これが②と等しいことから $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ …④

逆に，③，④のとき，①は一定値 $|\vec{u}|^2$ をとる。

③，④より $\vec{u}, \vec{v}$ は大きさが等しく，直交するので $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ となる。

よって　$A=\begin{pmatrix} a & \mp c \\ c & \pm a \end{pmatrix}$

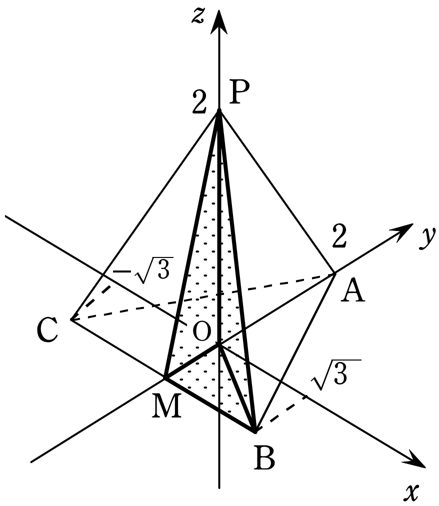
$A\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ より $\begin{cases} a\mp\sqrt{3}c=-4 \\ c\pm\sqrt{3}a=0 \end{cases}$　$\therefore a=-1,\ c=\pm\sqrt{3}$（複号同順）

よって　$A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix}$

〔注〕原点と異なる任意の点Pに対し $\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}$ が一定になることから，変換 f は，「原点のまわりの回転と相似拡大の合成」または「原点に関する直線に関する対称移動と相似拡大の合成」になります。

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{6}$]

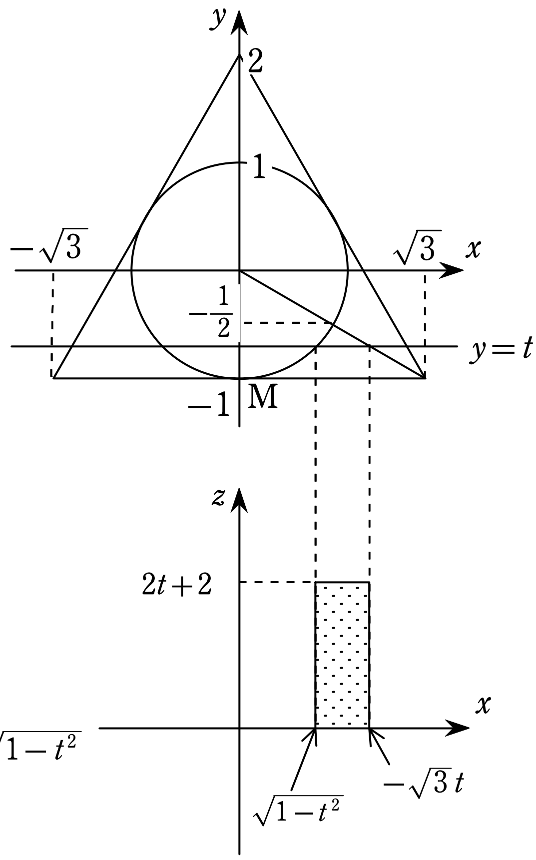
xyz 空間に 4 点 P(0, 0, 2), A(0, 2, 0), B($\sqrt{3}$, −1, 0), C($-\sqrt{3}$, −1, 0) をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。



BC の中点を M(0, −1, 0) とすると，対称性より四面体 POBM の $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たす部分 K の体積 V の 6 倍を求めればよい。

立体 K は $-1 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}$ の範囲に存在し，

平面 $y=t$ …①による K の断面は，平面 PBM との交線が x 軸に平行な直線で，z 座標は $z=2t+2$ であり，図の網目部分の長方形になる。その断面積を $S(t)$ とすると



$$S(t)=\left(-\sqrt{3}t-\sqrt{1-t^2}\right)(2t+2)$$

$$=2\left\{-\sqrt{3}(t^2+t)-t\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}\right\}$$

となるから，求める体積は

$$6V=6\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} S(t)\,dt$$

$$=12\left\{\left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)-(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}-\underbrace{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\text{下図の斜線部の面積}}\right\}$$

$$=12\left\{\frac{5\sqrt{3}}{24}-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{3}-2\pi$$