[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{1}$]

(1) 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。

(2) 1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ。

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{2}$]

(1) $\log_{10} 3 = 0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ。

(2) 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}]$ が n の約数となるものは何個あるか。

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{3}$]

☆ ☆

3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ のグラフを C，直線 $y = ax$ を ℓ とする。

(1) C と ℓ が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲内にあるとき，C と ℓ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。

$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

☆ ☆

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{4}$]

n を正の整数とする。数列$\{a_k\}$を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\ a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{5}$]

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする。原点 O(0, 0) と異なる任意の 2 点 P, Q に対して $\dfrac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OQ}'}{\mathrm{OQ}}$ が成り立つ。ただし，P′, Q′ はそれぞれ P, Q の f による像を表す。

(1) $a^2+c^2=b^2+d^2$ を示せ。

(2) 1 次変換 f により，点 $(1, \sqrt{3})$ が点 $(-4, 0)$ に移るとき，A を求めよ。

[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{6}$]

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$, $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$, $\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$, $\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$ をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。