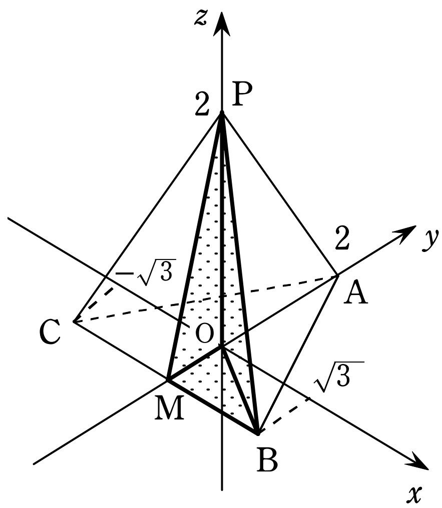
[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{6}$]

xyz 空間に 4 点 P(0, 0, 2), A(0, 2, 0), B($\sqrt{3}$, −1, 0), C($-\sqrt{3}$, −1, 0) をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。



BC の中点を M(0, −1, 0) とすると，対称性より

四面体 POBM の $x^2+y^2 \geqq 1$ を満たす部分 K の体積 V の

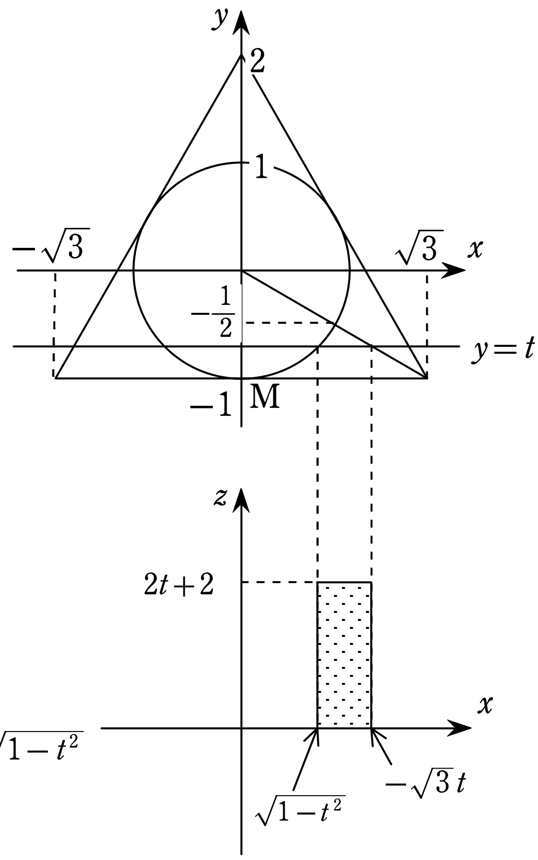
6 倍を求めればよい。

立体 K は $-1 \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}$ の範囲に存在し，

平面 $y=t$ …①による K の断面は，平面 PBM との交線が

x 軸に平行な直線で，z 座標は $z=2t+2$ であり，図の

網目部分の長方形になる。その断面積を $S(t)$ とすると



$$S(t)=\left(-\sqrt{3}t-\sqrt{1-t^2}\right)(2t+2)$$

$$=2\left\{-\sqrt{3}(t^2+t)-t\sqrt{1-t^2}-\sqrt{1-t^2}\right\}$$

となるから，求める体積は

$$6V=6\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} S(t)\,dt$$

$$=12\left\{\left[-\sqrt{3}\left(\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2\right)-(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}-\underbrace{\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1-t^2}\,dt}_{\text{下図の斜線部の面積}}\right\}$$

$$=12\left\{\frac{5\sqrt{3}}{24}-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right)\right\}$$

$$=4\sqrt{3}-2\pi$$