[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{5}$]

行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で定まる 1 次変換を f とする。原点 O(0, 0) と異なる任意の 2 点 P, Q に対して $\dfrac{\mathrm{OP'}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{\mathrm{OQ'}}{\mathrm{OQ}}$ が成り立つ。ただし， P′, Q′ はそれぞれ P, Q の f による像を表す。

(1) $a^2+c^2=b^2+d^2$ を示せ。

(2) 1 次変換 f により，点 $(1,\sqrt{3})$ が点 $(-4,0)$ に移るとき， A を求めよ。

$\vec{u}=\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおくと， P$(x,\ y)$ の f による像 P′ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=x\vec{u}+y\vec{v}$$

となり，原点と異なる任意の点 P に対し，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OP'}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}=\frac{|x\vec{u}+y\vec{v}|^2}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{|\vec{u}|^2\ x^2+|\vec{v}|^2\ y^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})xy}{x^2+y^2}\quad\cdots①$$

は一定値になる。

(1) $(x,\ y)=(1,0)$ のとき ①$=|\vec{u}|^2$ …②， $(x,\ y)=(0,1)$ のとき ①$=|\vec{v}|^2$

であるから $|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2$ …③

よって $a^2+c^2=b^2+d^2$

(2) $(x,\ y)=(1,1)$ のとき

$$① =\frac{|\vec{u}|^2+|\vec{v}|^2+2(\vec{u}\cdot\vec{v})}{2}=|\vec{u}|^2+\vec{u}\cdot\vec{v}\quad(\because|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2)$$

であるから，これが②と等しいことから $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ …④

逆に，③，④のとき，①は一定値 $|\vec{u}|^2$ をとる。

③，④より $\vec{u},\ \vec{v}$ は大きさが等しく，直交するので $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}=\pm\begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix}$ となる。

よって　$A=\begin{pmatrix} a & \mp c \\ c & \pm a \end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$　より　$\begin{cases} a \mp \sqrt{3}c = -4 \\ c \pm \sqrt{3}a = 0 \end{cases}$　$\therefore\ a=-1,\ c=\pm\sqrt{3}$（複号同順）

よって　$A=\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & \pm 1 \end{pmatrix}$

〔注〕原点と異なる任意の点 P に対し $\dfrac{\mathrm{OP}'}{\mathrm{OP}}$ が一定になることから，変換 f は，「原点のまわりの回転と相似拡大の合成」または「原点に関する直線に関する対称移動と相似拡大の合成」になります。