［ 東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{4}$ ］

n を正の整数とする。数列$\{a_k\}$を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\ a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。

(1)
$$\begin{aligned}a_2&=-\frac{1}{n+2}+na_1\\&=-\frac{1}{n+2}+n\cdot\frac{1}{n(n+1)}\\&=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}\\&=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_3&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}(a_1+a_2)\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\\&=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}\\&=\frac{1}{(n+2)(n+3)}\end{aligned}$$

(2) (1)より $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ …① と推定できるので，この推測が正しいことを数学的帰納法で示す。

[Ⅰ] $k=1$ のとき，$a_1=\dfrac{1}{(n+1-1)(n+1)}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ より①は成り立つ。

[Ⅱ] $k \leqq m$ のとき，①が成り立つとする。

このとき，
$$
\begin{aligned}
a_{m+1}&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}a_i\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{(n+i-1)(n+i)}\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{n+i-1}-\frac{1}{n+i}\right)\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m}\right)\\
&=-\frac{1}{m+n+1}+\frac{n}{n+m}\\
&=\frac{1}{(n+m-1)(n+m)}
\end{aligned}
$$

より $k=m+1$ のときも成り立つ。

よって，数学的帰納法により，すべての自然数 k に対し，①は成り立つ。

したがって求める一般項は $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$

(3) $a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ であるから $\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ が成り立つ。

よって $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}$

$$
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}<b_n<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}
$$

である。この式の左辺と右辺はともに $n\to\infty$ のとき $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$ に収束する。

よって，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$