[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{3}$]

☆───────────────────────────────☆

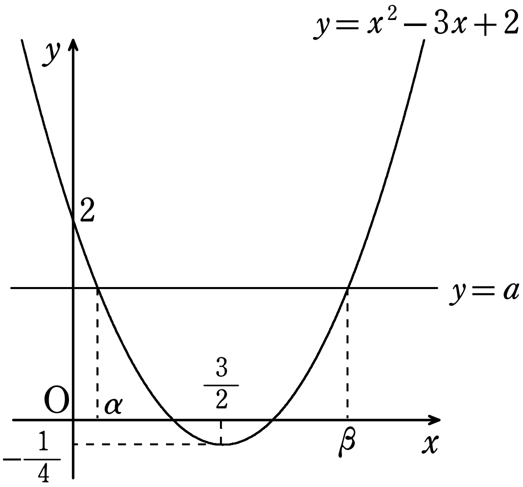
3 次関数 $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフを C，直線 $y=ax$ を ℓ とする。

(1) C と ℓ が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲内にあるとき，C と ℓ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。

$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。

☆───────────────────────────────☆



(1) C と ℓ を連立して　$x^3-3x^2+2x=ax$

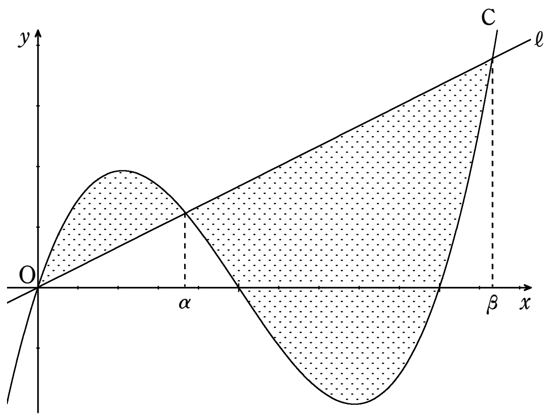
これが $x=0$ 以外の解をもつような a の範囲を求めればよい。

$x\neq 0$ より　$x^2-3x+2=a$　…①

$$\Leftrightarrow\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=a$$

であるから　$a \geqq -\dfrac{1}{4}$

(2) ①の 2 解を α,β $(\alpha\leqq\beta)$ とおく。



(i) $-\dfrac{1}{4}\leqq a\leqq 2$ のとき

$0\leqq\alpha\leqq\beta$ であり，$f(x)=x^3-3x^2+2x$　とおくと

$$S(a)=\int_0^\alpha\{f(x)-ax\}\,dx+\int_\alpha^\beta\{ax-f(x)\}\,dx$$

$$=\int_0^\alpha f(x)\,dx-a\int_0^\alpha x\,dx+a\int_\alpha^\beta x\,dx+\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

α,β は a の関数であるから，両辺を a で微分すると

$$S'(a)=f(\alpha)\frac{d\alpha}{da}-\left(1\cdot\int_0^\alpha x\,dx+a\cdot\alpha\frac{d\alpha}{da}\right)+\left\{1\cdot\int_\alpha^\beta x\,dx+a\cdot\left(\beta\frac{d\beta}{da}-\alpha\frac{d\alpha}{da}\right)\right\}$$
$$-\left\{f(\beta)\frac{d\beta}{da}-f(\alpha)\frac{d\alpha}{da}\right\}$$

$$=2\{f(\alpha)-a\alpha\}\frac{d\alpha}{da}-\{f(\beta)-a\beta\}\frac{d\beta}{da}-\int_0^\alpha x\,dx+\int_\alpha^\beta x\,dx$$

α,β は，$f(x)=ax$ の 2 解であるから　$f(\alpha)-a\alpha=f(\beta)-a\beta=0$　なので

$$S'(a)=-\int_0^\alpha x\,dx+\int_\alpha^\beta x\,dx=-\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^\alpha+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{2}\beta^2-\alpha^2=\frac{1}{2}(\beta+\sqrt{2}\alpha)(\beta-\sqrt{2}\alpha)$$

(1)のグラフより，a が $-\dfrac{1}{4}$ から 2 まで増加するとき，

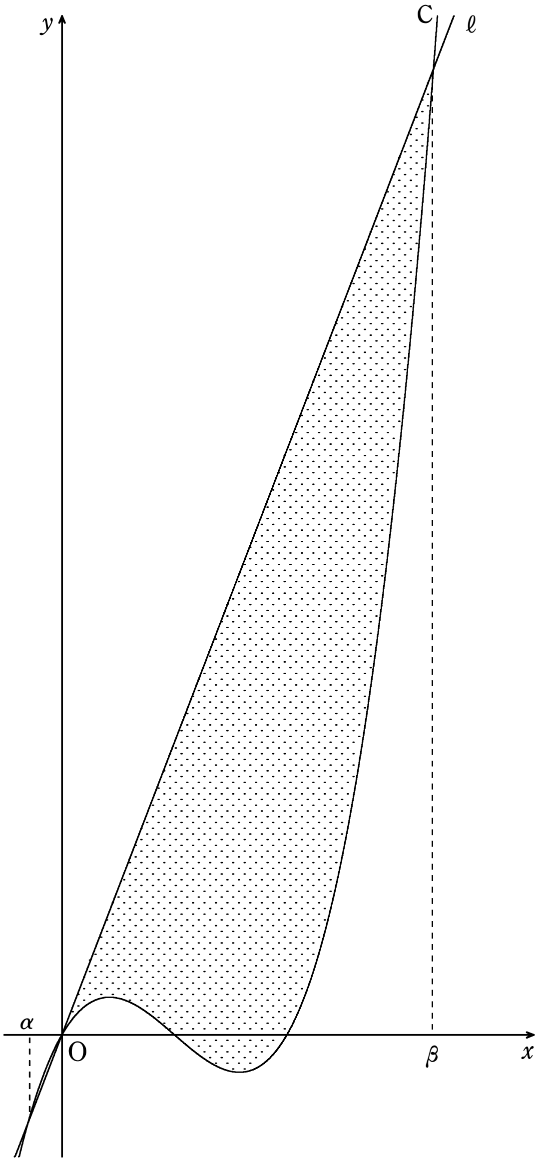
α は $\dfrac{3}{2}$ から 0 まで減少し，β は $\dfrac{3}{2}$ から 3 まで増加するから，$\beta=\sqrt{2}\alpha$ …②

となるときの a の値を a_0 とすると，$S(a)$ の増減は下表に従う。

a	$-\dfrac{1}{4}$	…	a_0	…	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘		↗	

(ⅱ) $a \geqq 2$ のとき

囲まれる面積 $S(a)$ は a の増加関数であることは図より明らか。



よって(ⅰ)のときに最小値をとることになり，

それは①の 2 解 α, β が②を満たすときである。

解と係数の関係より　$\alpha+\beta=3$ …③，$\alpha\beta=2-a$ …④

②，③より　$\alpha=3(\sqrt{2}-1)$

これと④より　$a=2-\alpha\beta$

$$=2-\sqrt{2}\alpha^2$$

$$=2-\sqrt{2}\{3(\sqrt{2}-1)\}^2$$

$$=38-27\sqrt{2}$$