[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{2}$]

☆―――☆

(1) $\log_{10}3=0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n$ の桁数を求めよ。

(2) 実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $\left[\sqrt{n}\right]$ が n の約数となるものは何個あるか。

☆―――☆

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n=1+3+3^2+\cdots+3^{99}$

$$=\frac{1-3^{100}}{1-3}$$

$$=\frac{3^{100}-1}{2}$$

ここで，3^{100} の桁数を N とすると

$10^{N-1}\leqq 3^{100}<10^N$

$N-1\leqq\log_{10}3^{100}<N$

$N-1\leqq 100\cdot\log_{10}3<N$

$N-1\leqq 47.71<N$

これを満たす整数 N は 48 であるから，3^{100} は 48 桁。

また，3^{100} の首位の数字を a とおくと

$a\times10^{47}\leqq 3^{100}$

$\log_{10}\left(a\times10^{47}\right)\leqq\log_{10}3^{100}$

$\log_{10}a\leqq 0.71$

$\log_{10}3=0.4771$ であるから a は 3 以上である。

よって $\dfrac{3^{100}-1}{2}$ は，3^{100} の一の位の数が 0 ではないから $3^{100}-1$ でも 48 桁のままであり，

首位の数字が 1 ではないので，2 で割っても桁数は変わらないことなる。

よって $\dfrac{3^{100}-1}{2}$ の桁数は 48。

(2) $\left[\sqrt{n}\right]=k$ とおくと，$k \leqq \sqrt{n} < k+1$

2 乗して $k^2 \leqq n < (k+1)^2 \iff k^2 \leqq n < k^2+2k+1$

k^2+2k+1 は整数なので $k^2 \leqq n \leqq k^2+2k$ …①

$\left(\left[\sqrt{n}\right]=\right) k$ が n の約数になるということは，n が k の倍数になるということであり，

①の中で n が k の倍数になっているものは $k^2,\ k^2+k,\ k^2+2k$ の 3 個ある。

$n \leqq 10000$ …② であるとき，$1 \leqq k \leqq 100$ であり，

$1 \leqq k \leqq 99$ に対しては 3 個ずつ，$k=100$ の対しては 1 個が②を満たす。

よって求める個数は $99 \times 3 + 1 = 298$