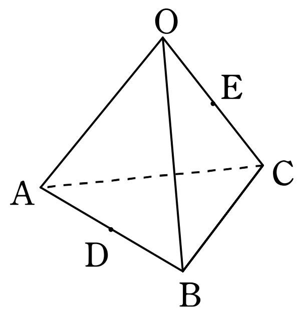
[東京工業大学 2012 年前期 $\boxed{1}$]

(1) 辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする。

2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。

(2) 1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$



$$=\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\quad\left(\because\ \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1\right)$$

(2) 目の積が 10 の倍数になるのは，『「偶数の目が出る」かつ「5 の目が出る」』ときである。

この余事象は，『「偶数の目が出ない」または「5 の目が出ない」』である。

A ：偶数の目が出ない

B ：5 の目が出ない

とすると，求める確率は $1-P(A\cup B)=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$

$$=1-\left\{\left(\frac{3}{6}\right)^3+\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3\right\}$$

$$=1-\left\{\frac{27+125-8}{216}\right\}$$

$$=1-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

〔別解〕すべて書き出す。

10：（1，2，5）→ 6 通り

20：（1，4，5）→ 6 通り，（2，2，5）→ 3 通り

30：（2，3，5）→ 6 通り，（1，5，6）→ 6 通り

40：（2，4，5）→ 6 通り

50：（2，5，5）→ 3 通り

60：（2，5，6）→ 6 通り，（3，4，5）→ 6 通り

80：（4，4，5）→ 3 通り

90：（3，5，6）→ 6 通り

100：（4，5，5）→ 3 通り

120：（4，5，6）→ 6 通り

150：（5，5，6）→ 3 通り

180：（5，6，6）→ 3 通り

これらの合計は 72 通りであるから，求める確率は $\dfrac{72}{6^3}=\dfrac{1}{3}$