**[ 東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$ ]**

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述して下さい。

$n!$ が $n^2$ の倍数となるような自然数 $n$ をすべて求めよ。

---

$n=1$ のときは適するので，以下 $n \geqq 2$ とする。

$\dfrac{n!}{n^2} = \dfrac{(n-1)!}{n}$ であるから，右辺が整数となる条件を考える。

（ i ） $n$ が素数のとき

$n-1$ 以下の自然数はどれも $n$ を素因数に持たないので，

$(n-1)!$ は $n$ の倍数でなく不適。

（ⅱ） $n$ が合成数のとき

$n = pq$ （ $p, q$ は $n-1$ 以下の相異なる自然数）…① と表せるならば，

$\dfrac{(n-1)!}{n}$ は $n-1$ 以下の自然数のうち $p, q$ 以外のものの積であり整数となる。

①の形で表せない合成数は， $n = p^2$ （ $p$ は素数）の形のものに限られる。

・ $p=2$ （ $n=4$ ）のとき， $\dfrac{(n-1)!}{n} = \dfrac{3}{2}$ より不適

・ $p \geqq 3$ のとき， $n = p^2 \geqq 3p > 2p$ なので， $p, 2p$ は $n-1$ 以下の自然数である。

$n-1$ 以下の自然数のうち， $p, 2p$ 以外のものの積を $A$ とすると

$\dfrac{(n-1)!}{n} = \dfrac{A \cdot p \cdot 2p}{p^2} = 2A$ は整数であり，適する。

以上より， $n$ は 1 および 6 以上の合成数である。

## [ 東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$ ]

☆ ☆

正の数 $a, b, c$ が三角形の 3 辺の長さとなるように動くとき

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

の取り得る値の範囲を求めよ。

☆ ☆

$a+b+c=2k$ と固定し，$t=ab+bc+ca$ とおくと，

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\frac{(2k)^2-2t}{t}=\frac{(2k)^2}{t}-2 \quad \cdots①$$

となる。$t$ のとり得る値の範囲を求める。

$c$ を消去すると，$t=ab+(a+b)c=ab+(a+b)\{2k-(a+b)\}$

$$=-b^2+(2k-a)b+2ka-a^2=-\left(b-\frac{2k-a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+ka+k^2 \quad \cdots②$$

となる。$f(b)=-\left(b-\frac{2k-a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+ka+k^2$ とおく。

ここで,「$a, b, c$ が三角形の 3 辺の長さとなる」$\Leftrightarrow$ $b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c$

$\Leftrightarrow$ $2k-a>a,\ 2k-b>b,\ a+b>2k-(a+b)$

$\Leftrightarrow$ $a<k,\ b<k,\ a+b>k$

であるので，$a$ を $0<a<k$ の範囲で固定したときの $b$ の範囲は $k-a<b<k \quad \cdots③$

②より $y=f(b)$ は $b=\frac{2k-a}{2}$ （区間③の真ん中）を軸とする上に凸な放物線であるので，

$f(b)$ の値域は $f(k)<f(b) \leqq f\left(\frac{2k-a}{2}\right)$

よって $-a^2+ka+k^2<f(b) \leqq -\frac{3}{4}a^2+ka+k^2$

$$-\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{5}{4}k^2<f(b) \leqq -\frac{3}{4}\left(a-\frac{2}{3}k\right)^2+\frac{4}{3}k^2$$

となる。$0<a<k$ で $a$ を変化させることで，

$t$ の範囲は $k^2<t \leqq \frac{4}{3}k^2$ となり，①から $1 \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}<2$

[別解]

$x=-a+b+c,\ y=a-b+c,\ z=a+b-c$ …④ とおくと，

三角形の成立条件より $x,\ y,\ z>0$ である。

逆に，$x,\ y,\ z>0$ とすると $a=\dfrac{y+z}{2},\ b=\dfrac{z+x}{2},\ c=\dfrac{x+y}{2}$ …⑤

は正の実数となるので，$x,\ y,\ z$ は独立に変化できる。

⑤を与式に代入すると $u=\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ として

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\cdots=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}=\frac{2(1+u)}{1+3u}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{1+3u}\right)$$

次に，$x,\ y,\ z$ が正の実数全体を変化するとき，$u$ の変化できる範囲を求める。

$u>0$ であり，$x=1,\ y\to 0,\ z\to 0$ とすることで $u\to 0$ となる。

また，$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\dfrac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}\geqq 0$ より

$u\leqq 1$（等号は $x=y=z$ で成立）である。

これを⑥に代入し，$u$ の範囲は $0<u\leqq 1$ となるので $1\leqq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}<2$

[ 東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$ ]

☆―――☆

$f(x^2+1)=f(x)^2+1$ をみたす $n$ 次の多項式 $f(x)$ が存在するような $n$ をすべて求めよ。

☆―――☆

$f(x^2+1)=f(x)^2+1$ …①

求める $n$ は $n=2^k$ （$k$ は非負整数） …② であることを示す。

(A) ②が条件を満たすことの証明

関数列 $\{f_k(x)\}$ （$k=0, 1, \cdots$）を $f_0(x)=x$, $f_{k+1}(x)=f_k(x)^2+1$ …③ で定義する。

$f_0(x)$ は①を満たし， $f_k(x)$ が①を満たすとすると，③より

$f_{k+1}(x^2+1)=\{f_k(x^2+1)\}^2+1=\{f_k(x)^2+1\}^2+1=f_{k+1}(x)^2+1$ となるので

$f_{k+1}(x)$ も①を満たす。

よって，$\{f_k(x)\}$ （$k$ は非負整数）は①を満たす。

③から $f_k(x)$ の次数は帰納的に $2^k$ となるので，示された。

(B) ②以外の $n$ が条件を満たさないことの証明

まず， $f(x)$ は奇数次の項のみ，または偶数次の項のみからなるかのどちらかであることを示す。

奇数次の項と偶数次の項が両方含まれているとし，

奇数次の項で最高次のものを $p$ 次，偶数次の項で最高次のものを $q$ 次の項とする。

このとき，①の右辺を展開すると $p+q$ （奇数）次の項が現れ，打ち消し合わず残る。

一方，①の左辺を展開すると偶数次の項のみからなり，矛盾するので示された。

(ｉ) $f(x)$ が奇数次の項のみからなるとき

多項式 $g(x)$ を用いて， $f(x)=xg(x)$ と書ける。これを①に代入して，

$(x^2+1)g(x^2+1)=x^2g(x)^2+1$ …④

となる。④に $x=0$ を代入して $g(1)=1$ を得る。

また， $g(t)=1$ を満たす実数 $t$ に対し，④で $x=t$ とすることで

$(t^2+1)g(t^2+1)=t^2+1$ すなわち $g(t^2+1)=1$ を得る。

以上より，実数 $a_k$ （$k=0, 1, \cdots$）を

$a_0=1,\ a_{k+1}={a_k}^2+1$ （$k=0,1,\cdots$）で定めると，$g(a_0)=g(a_1)=g(a_2)=\cdots=1$ となる。

$a_0<a_1<a_2<\cdots$ であることと合わせて，$g(x)=1$ を満たす $x$ が無数にあることがわかる。

つまり，多項式として $g(x)=1$ であり，$f(x)=x$ （$n=1$）を得る。

（ⅱ）$f(x)$ が偶数次の項のみからなるとき

$f(x)$ の最高次の項を $b_N x^{2N}$ とすると，

$f(x)-b_N x^{2N}(x^2+1)^N$ は，偶数次の項のみからなる $2N$ 次未満の多項式である。

この操作を繰り返すことで $f(x)=c_N(x^2+1)^N+\cdots+c_1(x^2+1)+c_0$ と表示できる。

つまり，$N$ 次多項式 $h(x)$ を用いて，$f(x)=h(x^2+1)$ と表せる。

①に代入して $h\left((x^2+1)^2+1\right)=\left\{h(x^2+1)\right\}^2+1$ となるが，これは

$x^2+1$ の形で表せる無数の値 $t$ に対して $h(t^2+1)=h(t)^2+1$ が成立することを意味する。

よって多項式として $h(x^2+1)=h(x)^2+1$ が成立し，$N$ 次多項式として $h(x)$ も①の解である。

$f(x)$ の次数を $2^\alpha\cdot\beta$（$\alpha$ は自然数，$\beta$ は正の奇数）とする。

$2^\alpha\cdot\beta$ 次の解があれば，上記の事実を $\alpha$ 回用いることで，$\beta$ 次の解が存在することになる。

(ⅰ)で示したことから，$\beta=1$ つまり $n=2^\alpha$（$\alpha$ は自然数）を得る。

## ［ 東京工業大学 2011 年 第１類特別入試 $\boxed{4}$ ］

半径１の円に内接する正９角形がある。この正９角形の周上にすべての頂点を持つ正多角形の辺数 $n$ を５つ求めよ。さらに各 $n$ に対し，そのような正 $n$ 角形の例を１つあげて１辺の長さを求めよ。

---

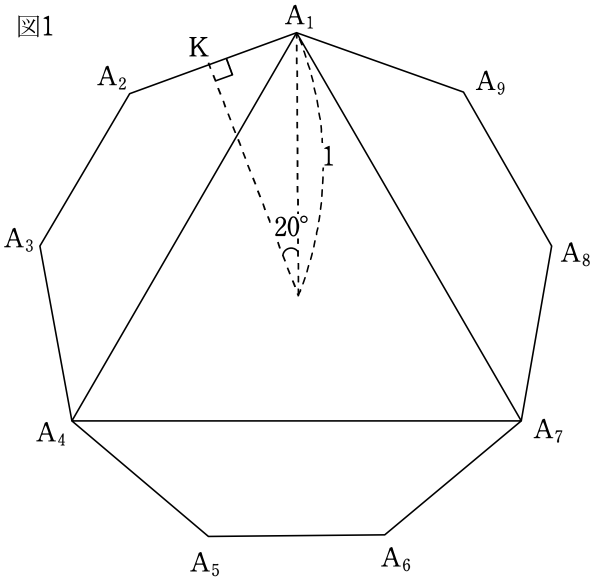
正９角形の中心を O，頂点を反時計回りに $A_1, A_2, \cdots, A_9$ とする（$A_{10}=A_1$ とする）。

（ⅰ）$n=3$ のとき

$\triangle A_1A_4A_7$ が求めるものの１つである。

$\angle A_1OA_4=120^\circ$ より，一辺の長さは $\sqrt{3}$

図1




（ⅱ）$n=9$ のとき

もとの正９角形が求めるものの１つである。

一辺の長さは $A_1A_2$ の中点を K として，

$A_1A_2=2A_1K=2\sin 20^\circ$

（ⅲ）$n=18$ のとき

18 点 $B_1, B_2, \cdots, B_{18}$ を

「$A_i, B_{2i-1}, B_{2i}, A_{i+1}$ がこの順に一直線上にあり，$A_iB_{2i-1}=B_{2i}A_{i+1}$ かつ $\angle B_{2i-1}OB_{2i}=20^\circ$」

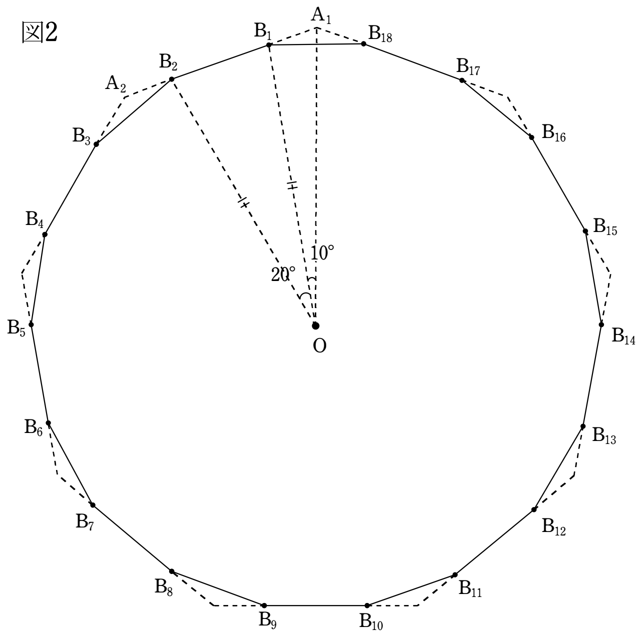
が $i=1, 2, \cdots, 9$ に対し成り立つようにとる。

このとき，$\triangle OB_1B_2$，$\triangle OB_2B_3$，…，$\triangle OB_{18}B_1$ は

頂角が $20^\circ$ の二等辺三角形になるので合同であり，

18 角形 $B_1B_2\cdots B_{18}$ は O を中心とする正 18 角形となる。

図2




また，正９角形の１つの内角は $140^\circ$ であるから，

$\triangle OA_1B_1$ において正弦定理より

$$\frac{OB_1}{\sin 70^\circ}=\frac{OA_1}{\sin 100^\circ}$$

よって $OB_1=\dfrac{\sin 70^\circ}{\sin 100^\circ}\cdot OA_1$

$$=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 100^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ}\quad\cdots①$$

次に，$\triangle \mathrm{OB_1B_2}$ において正弦定理を用いて，①より

一辺の長さは $\mathrm{B_1B_2} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \mathrm{OB_1} = \dfrac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos^2 10^\circ}$

（ⅳ）$n = 6$ のとき

6 角形 $\mathrm{B_1B_4B_7B_{10}B_{13}B_{16}}$ は正 6 角形になる。

$\angle \mathrm{B_1OB_4} = 60^\circ$ と①より，一辺の長さは $\mathrm{B_1B_4} = \mathrm{OB_1} = \dfrac{\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ}$

（ⅴ）$n = 4$ のとき

図 3 で，長方形 $\mathrm{A_2Q'R'A_9}$ は $\mathrm{A_2A_9} = \mathrm{A_2A_4} < \mathrm{A_2Q'}$ より縦長，

長方形 $\mathrm{P'A_4A_7S'}$ は $\mathrm{A_4A_7} > \mathrm{A_2A_4} > \mathrm{P'A_4}$ より横長である。

よって，正方形 $\mathrm{PQRS}$ を図 3 のようにとることができる。

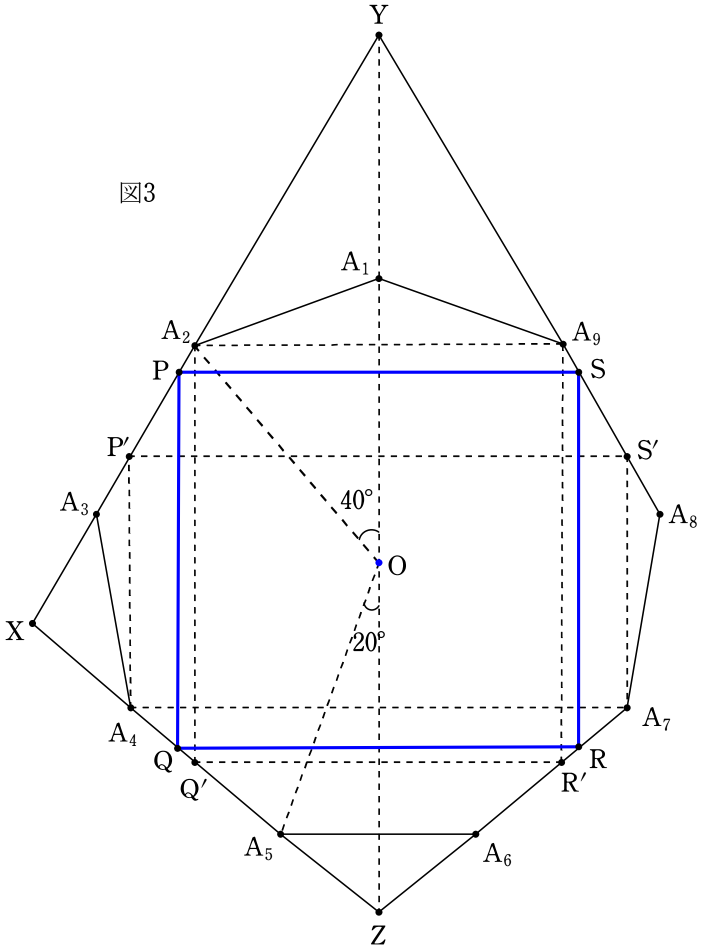



図 3 のように交点 $\mathrm{X, Y, Z}$ を定めると，

$$\angle \mathrm{OYA_2} = \angle \mathrm{OA_1A_2} - \angle \mathrm{A_1A_2Y} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{OZA_5} = \angle \mathrm{OA_5X} - \angle \mathrm{A_5OZ} = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$$

であり，$\triangle \mathrm{OA_2Y}$，$\triangle \mathrm{OA_5Z}$ において正弦定理から

$$\mathrm{OY}=\frac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ}\cdot \mathrm{OA_2}=2\sin 110^\circ=2\cos 20^\circ$$

$$\mathrm{OZ}=\frac{\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ}\cdot \mathrm{OA_5}=\frac{\cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$

となるので，$\mathrm{YZ}=\mathrm{OY}+\mathrm{OZ}=\dfrac{\cos 20^\circ(1+2\cos 40^\circ)}{\cos 40^\circ}$

$\ell=\dfrac{\cos 20^\circ(1+2\cos 40^\circ)}{\cos 40^\circ}$ とおく。

$\triangle \mathrm{XYZ}$ において，図 4 のように M, N を定める。

$\mathrm{XQ}:\mathrm{QZ}=t:(1-t)$ とおくと，$\mathrm{PQ}=t\mathrm{YZ}=t\ell$ …②

また，$\triangle \mathrm{XYZ}$ において正弦定理から

$$\mathrm{XZ}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 100^\circ}\cdot \mathrm{YZ}=\frac{1}{2\cos 10^\circ}\cdot \ell$$

となり，$\mathrm{XM}=\mathrm{XZ}\sin 50^\circ=\dfrac{\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\ell$

$$\mathrm{QN}=(1-t)\mathrm{XM}=(1-t)\cdot\frac{\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\ell \quad \cdots③$$

ここで，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QN}=2:1$ より②，③から

$$t\ell=2\cdot(1-t)\cdot\frac{\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\ell$$

よって $t=\dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ+\cos 40^\circ}$

したがって，一辺の長さは $t\ell=\dfrac{\cos 20^\circ(1+2\cos 40^\circ)}{\cos 10^\circ+\cos 40^\circ}$

図4