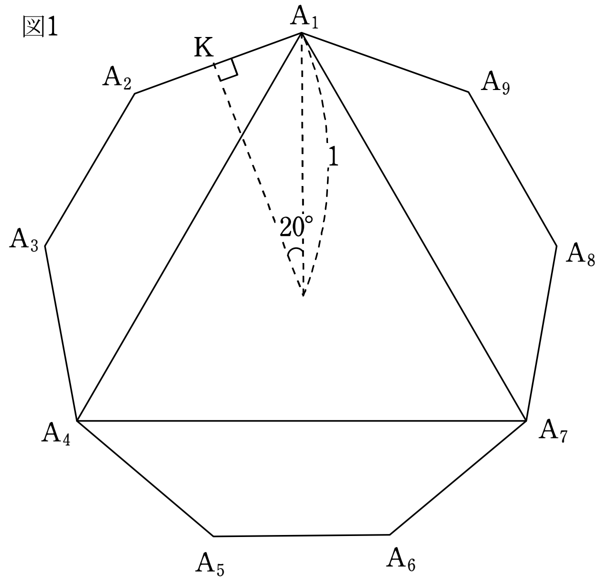
## [ 東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{4}$ ]

半径 1 の円に内接する正 9 角形がある。この正 9 角形の周上にすべての頂点を持つ正多角形の辺数 $n$ を 5 つ求めよ。さらに各 $n$ に対し，そのような正 $n$ 角形の例を 1 つあげて 1 辺の長さを求めよ。

正 9 角形の中心を O，頂点を反時計回りに $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_9$ とする（$\mathrm{A}_{10}=\mathrm{A}_1$ とする）。

図1




（i）$n=3$ のとき

$\triangle \mathrm{A}_1\mathrm{A}_4\mathrm{A}_7$ が求めるものの 1 つである。

$\angle \mathrm{A}_1\mathrm{OA}_4=120^\circ$ より，一辺の長さは $\sqrt{3}$

（ii）$n=9$ のとき

もとの正 9 角形が求めるものの 1 つである。

一辺の長さは $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ の中点を K として，

$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2=2\mathrm{A}_1\mathrm{K}=2\sin 20^\circ$

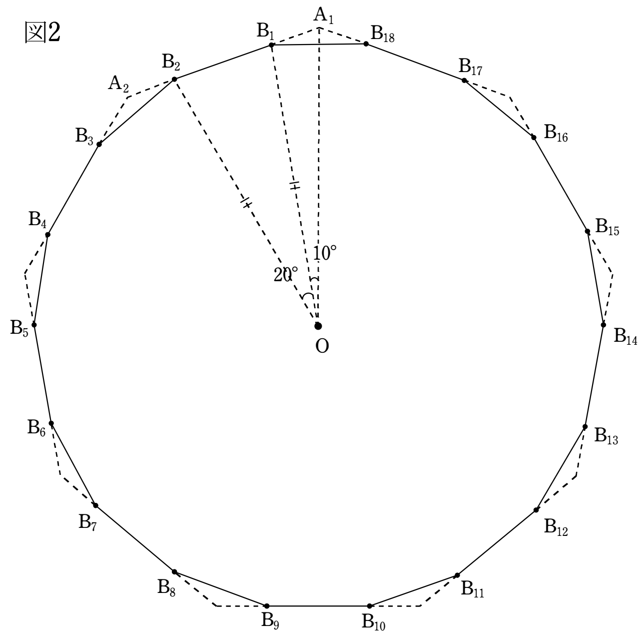
（iii）$n=18$ のとき

18 点 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \cdots, \mathrm{B}_{18}$ を

「$\mathrm{A}_i, \mathrm{B}_{2i-1}, \mathrm{B}_{2i}, \mathrm{A}_{i+1}$ がこの順に一直線上にあり，$\mathrm{A}_i\mathrm{B}_{2i-1}=\mathrm{B}_{2i}\mathrm{A}_{i+1}$ かつ $\angle \mathrm{B}_{2i-1}\mathrm{OB}_{2i}=20^\circ$」

が $i=1, 2, \cdots, 9$ に対し成り立つようにとる。

図2




このとき，$\triangle \mathrm{OB}_1\mathrm{B}_2$，$\triangle \mathrm{OB}_2\mathrm{B}_3$，…，$\triangle \mathrm{OB}_{18}\mathrm{B}_1$ は

頂角が $20^\circ$ の二等辺三角形になるので合同であり，

18 角形 $\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2\cdots\mathrm{B}_{18}$ は O を中心とする正 18 角形となる。

また，正 9 角形の 1 つの内角は $140^\circ$ であるから，

$\triangle \mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1$ において正弦定理より

$$\frac{\mathrm{OB}_1}{\sin 70^\circ}=\frac{\mathrm{OA}_1}{\sin 100^\circ}$$

よって $\mathrm{OB}_1=\dfrac{\sin 70^\circ}{\sin 100^\circ}\cdot \mathrm{OA}_1$

$$=\frac{\sin 70^\circ}{\sin 100^\circ}=\frac{\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ} \quad \cdots①$$

次に，$\triangle \mathrm{OB_1B_2}$ において正弦定理を用いて，①より

一辺の長さは $\mathrm{B_1B_2} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \mathrm{OB_1} = \dfrac{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos^2 10^\circ}$

（iv）$n = 6$ のとき

6 角形 $\mathrm{B_1B_4B_7B_{10}B_{13}B_{16}}$ は正 6 角形になる。

$\angle \mathrm{B_1OB_4} = 60^\circ$ と①より，一辺の長さは $\mathrm{B_1B_4} = \mathrm{OB_1} = \dfrac{\cos 20^\circ}{\cos 10^\circ}$

（v）$n = 4$ のとき

図 3 で，長方形 $\mathrm{A_2Q'R'A_9}$ は $\mathrm{A_2A_9} = \mathrm{A_2A_4} < \mathrm{A_2Q'}$ より縦長，

長方形 $\mathrm{P'A_4A_7S'}$ は $\mathrm{A_4A_7} > \mathrm{A_2A_4} > \mathrm{P'A_4}$ より横長である。

よって，正方形 $\mathrm{PQRS}$ を図 3 のようにとることができる。

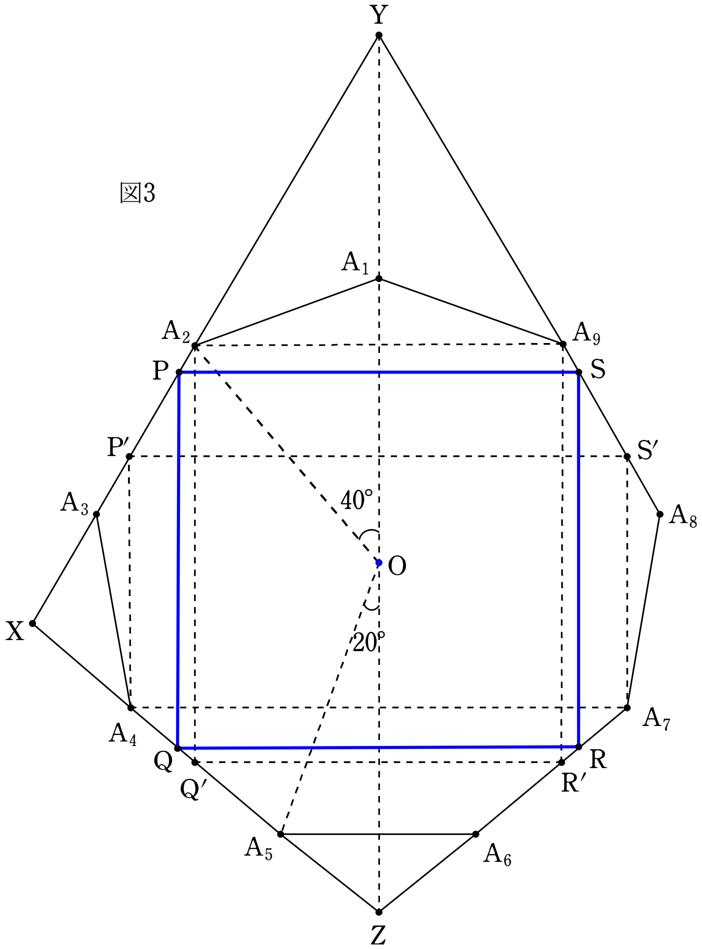



図3

図 3 のように交点 $\mathrm{X, Y, Z}$ を定めると，

$$\angle \mathrm{OYA_2} = \angle \mathrm{OA_1A_2} - \angle \mathrm{A_1A_2Y} = 70^\circ - 40^\circ = 30^\circ$$

$$\angle \mathrm{OZA_5} = \angle \mathrm{OA_5X} - \angle \mathrm{A_5OZ} = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$$

であり，$\triangle \mathrm{OA_2Y}$，$\triangle \mathrm{OA_5Z}$ において正弦定理から

$$\mathrm{OY} = \frac{\sin 110^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \mathrm{OA_2} = 2\sin 110^\circ = 2\cos 20^\circ$$

$$\mathrm{OZ} = \frac{\sin 110^\circ}{\sin 50^\circ} \cdot \mathrm{OA_5} = \frac{\cos 20^\circ}{\cos 40^\circ}$$

となるので，$\mathrm{YZ} = \mathrm{OY} + \mathrm{OZ} = \dfrac{\cos 20^\circ (1 + 2\cos 40^\circ)}{\cos 40^\circ}$

$\ell = \dfrac{\cos 20^\circ (1 + 2\cos 40^\circ)}{\cos 40^\circ}$ とおく。

$\triangle \mathrm{XYZ}$ において，図 4 のように M, N を定める。

$\mathrm{XQ} : \mathrm{QZ} = t : (1-t)$ とおくと，$\mathrm{PQ} = t\mathrm{YZ} = t\ell$ …②

また，$\triangle \mathrm{XYZ}$ において正弦定理から

$$\mathrm{XZ} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 100^\circ} \cdot \mathrm{YZ} = \frac{1}{2\cos 10^\circ} \cdot \ell$$

となり，$\mathrm{XM} = \mathrm{XZ}\sin 50^\circ = \dfrac{\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\ell$

$$\mathrm{QN} = (1-t)\mathrm{XM} = (1-t) \cdot \frac{\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\ell \quad \cdots ③$$

ここで，$\mathrm{PQ} : \mathrm{QN} = 2 : 1$ より②，③から

$$t\ell = 2 \cdot (1-t) \cdot \frac{\cos 40^\circ}{2\cos 10^\circ}\ell$$

よって $t = \dfrac{\cos 40^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 40^\circ}$

したがって，一辺の長さは $t\ell = \dfrac{\cos 20^\circ (1 + 2\cos 40^\circ)}{\cos 10^\circ + \cos 40^\circ}$

図4