[**東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{3}$**]

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x^2+1)=f(x)^2+1$ をみたす n 次の多項式 $f(x)$ が存在するような n をすべて求めよ。

☆――――――――――――――――――――――――――――――――――――――☆

$f(x^2+1)=f(x)^2+1$ …①

求める n は $n=2^k$ （k は非負整数） …② であることを示す。

(A) ②が条件を満たすことの証明

関数列 $\{f_k(x)\}$ （$k=0, 1, \cdots$）を $f_0(x)=x$, $f_{k+1}(x)=f_k(x)^2+1$ …③ で定義する。

$f_0(x)$ は①を満たし， $f_k(x)$ が①を満たすとすると，③より

$f_{k+1}(x^2+1)=\{f_k(x^2+1)\}^2+1=\{f_k(x)^2+1\}^2+1=f_{k+1}(x)^2+1$ となるので

$f_{k+1}(x)$ も①を満たす。

よって，$\{f_k(x)\}$ （k は非負整数）は①を満たす。

③から $f_k(x)$ の次数は帰納的に 2^k となるので，示された。

(B) ②以外の n が条件を満たさないことの証明

まず， $f(x)$ は奇数次の項のみ，または偶数次の項のみからなるかのどちらかであることを示す。

奇数次の項と偶数次の項が両方含まれているとし，

奇数次の項で最高次のものを p 次，偶数次の項で最高次のものを q 次の項とする。

このとき，①の右辺を展開すると $p+q$ （奇数）次の項が現れ，打ち消し合わず残る。

一方，①の左辺を展開すると偶数次の項のみからなり，矛盾するので示された。

（ｉ） $f(x)$ が奇数次の項のみからなるとき

多項式 $g(x)$ を用いて， $f(x)=xg(x)$ と書ける。これを①に代入して，

$$(x^2+1)g(x^2+1)=x^2g(x)^2+1 \quad \cdots④$$

となる。④に $x=0$ を代入して $g(1)=1$ を得る。

また， $g(t)=1$ を満たす実数 t に対し，④で $x=t$ とすることで

$(t^2+1)g(t^2+1)=t^2+1$ すなわち $g(t^2+1)=1$ を得る。

以上より，実数 a_k （$k=0, 1, \cdots$）を

$a_0=1,\ a_{k+1}={a_k}^2+1$ （$k=0,1,\cdots$）で定めると，$g(a_0)=g(a_1)=g(a_2)=\cdots=1$ となる。

$a_0<a_1<a_2<\cdots$ であることと合わせて，$g(x)=1$ を満たす x が無数にあることがわかる。

つまり，多項式として $g(x)=1$ であり，$f(x)=x$ （$n=1$）を得る。

（ⅱ） $f(x)$ が偶数次の項のみからなるとき

$f(x)$ の最高次の項を $b_N x^{2N}$ とすると，

$f(x)-b_N x^{2N}(x^2+1)^N$ は，偶数次の項のみからなる $2N$ 次未満の多項式である。

この操作を繰り返すことで $f(x)=c_N(x^2+1)^N+\cdots+c_1(x^2+1)+c_0$ と表示できる。

つまり，N 次多項式 $h(x)$ を用いて，$f(x)=h(x^2+1)$ と表せる。

①に代入して $h\left((x^2+1)^2+1\right)=\left\{h(x^2+1)\right\}^2+1$ となるが，これは

x^2+1 の形で表せる無数の値 t に対して $h(t^2+1)=h(t)^2+1$ が成立することを意味する。

よって多項式として $h(x^2+1)=h(x)^2+1$ が成立し，N 次多項式として $h(x)$ も①の解である。

$f(x)$ の次数を $2^\alpha\cdot\beta$ （α は自然数，β は正の奇数）とする。

$2^\alpha\cdot\beta$ 次の解があれば，上記の事実を α 回用いることで，β 次の解が存在することになる。

(ⅰ)で示したことから，$\beta=1$ つまり $n=2^\alpha$ （α は自然数）を得る。