[東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{2}$]

☆―――☆

正の数a, b, cが三角形の 3 辺の長さとなるように動くとき

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$$

の取り得る値の範囲を求めよ。

☆―――☆

$a+b+c=2k$ と固定し, $t=ab+bc+ca$ とおくと,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\frac{(2k)^2-2t}{t}=\frac{(2k)^2}{t}-2 \quad \cdots①$$

となる。tのとり得る値の範囲を求める。

cを消去すると, $t=ab+(a+b)c=ab+(a+b)\{2k-(a+b)\}$

$$=-b^2+(2k-a)b+2ka-a^2=-\left(b-\frac{2k-a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+ka+k^2 \quad \cdots②$$

となる。 $f(b)=-\left(b-\frac{2k-a}{2}\right)^2-\frac{3}{4}a^2+ka+k^2$ とおく。

ここで,「a, b, cが三角形の 3 辺の長さとなる」$\Leftrightarrow$ $b+c>a,\ c+a>b,\ a+b>c$

$\Leftrightarrow$ $2k-a>a,\ 2k-b>b,\ a+b>2k-(a+b)$

$\Leftrightarrow$ $a<k,\ b<k,\ a+b>k$

であるので, aを $0<a<k$ の範囲で固定したときのbの範囲は $k-a<b<k$ $\cdots③$

②より $y=f(b)$ は $b=\frac{2k-a}{2}$ （区間③の真ん中）を軸とする上に凸な放物線であるので,

$f(b)$の値域は $f(k)<f(b) \leqq f\left(\frac{2k-a}{2}\right)$

よって $-a^2+ka+k^2<f(b) \leqq -\frac{3}{4}a^2+ka+k^2$

$$-\left(a-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{5}{4}k^2<f(b) \leqq -\frac{3}{4}\left(a-\frac{2}{3}k\right)^2+\frac{4}{3}k^2$$

となる。$0<a<k$ でaを変化させることで,

tの範囲は $k^2<t \leqq \frac{4}{3}k^2$ となり, ①から $1 \leqq \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}<2$

[別解]

$x=-a+b+c,\ y=a-b+c,\ z=a+b-c$ …④ とおくと，

三角形の成立条件より $x,\ y,\ z>0$ である。

逆に，$x,\ y,\ z>0$ とすると $a=\dfrac{y+z}{2},\ b=\dfrac{z+x}{2},\ c=\dfrac{x+y}{2}$ …⑤

は正の実数となるので，$x,\ y,\ z$ は独立に変化できる。

⑤を与式に代入すると $u=\dfrac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$ として

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}=\cdots=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx\right)}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}=\frac{2(1+u)}{1+3u}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{1+3u}\right)$$

次に，$x,\ y,\ z$ が正の実数全体を変化するとき，u の変化できる範囲を求める。

$u>0$ であり，$x=1,\ y\to 0,\ z\to 0$ とすることで $u\to 0$ となる。

また，$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)=\dfrac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}\geqq 0$ より

$u\leqq 1$（等号は $x=y=z$ で成立）である。

これを⑥に代入し，u の範囲は $0<u\leqq 1$ となるので $1\leqq\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}<2$