[東京工業大学 2011 年 第 1 類特別入試 $\boxed{1}$]

この試験は現時点での諸君の論理的理解力の習熟度を測るためのものであり，あまりに乱暴な字ではその役に立ちません。できるだけ丁寧な字で，採点員が論理を追い易いように各自工夫し，結論ははっきりと記述して下さい。

$n!$ が n^2 の倍数となるような自然数 n をすべて求めよ。

$n=1$ のときは適するので，以下 $n \geqq 2$ とする。

$\dfrac{n!}{n^2}=\dfrac{(n-1)!}{n}$ であるから，右辺が整数となる条件を考える。

（ⅰ）n が素数のとき

$n-1$ 以下の自然数はどれも n を素因数に持たないので，

$(n-1)!$ は n の倍数でなく不適。

（ⅱ）n が合成数のとき

$n=pq$ （$p,\ q$ は $n-1$ 以下の相異なる自然数）…① と表せるならば，

$\dfrac{(n-1)!}{n}$ は $n-1$ 以下の自然数のうち $p,\ q$ 以外のものの積であり整数となる。

①の形で表せない合成数は，$n=p^2$ （p は素数）の形のものに限られる。

・ $p=2$ （$n=4$）のとき，$\dfrac{(n-1)!}{n}=\dfrac{3}{2}$ より不適

・ $p \geqq 3$ のとき，$n=p^2 \geqq 3p>2p$ なので，$p,\ 2p$ は $n-1$ 以下の自然数である。

$n-1$ 以下の自然数のうち，$p,\ 2p$ 以外のものの積を A とすると

$\dfrac{(n-1)!}{n}=\dfrac{A\cdot p\cdot 2p}{p^2}=2A$ は整数であり，適する。

以上より，n は 1 および 6 以上の合成数である。