[東京工業大学 2011 年後期 $\boxed{1}$]

正の実数 t に対して, 座標空間における 4 点 O(0, 0, 0), A(t, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) を考える。このとき，次の問に答えよ。

(1) 四面体OABC のすべての面に内接する球 P の半径 r を t を用いて表せ。

(2) t が動くとき，球 P の体積を四面体OABC の体積で割った値の最大値を求めよ。

(1) 四面体OABC の体積 V を 2 通りに表す。

△OAB を底面とする三角錐と考えれば

$$V = \triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times t \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{t}{6} \quad \cdots ①$$

また，球 P の中心を Q として四面体OABC を 4 つの三角錐に分割すれば，それぞれの三角錐の高さはすべて r になるので

V ＝四面体QOAB＋四面体QOBC＋四面体QOCA ＋四面体QABC

$$= (\triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OCA} + \triangle\mathrm{OAB}) \times r \times \frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{2t^2+1}}{2}\right) \times \frac{r}{3}$$

$$= \left(2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}\right)\frac{r}{6} \quad \cdots ②$$

①と②はいずれも球 P の体積を表しているので

$$\left(2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}\right)\frac{r}{6} = \frac{t}{6} \quad \text{より} \quad r = \frac{t}{2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}}$$

(2) 題意の値は $\displaystyle \frac{4}{3}\pi r^3 \div V = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{t}{2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}}\right)^3 \times \frac{6}{t}$

$$= 8\pi \cdot \frac{t^2}{\left(2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}\right)^3} \quad \text{である。}$$

$$f(t)=\frac{t^2}{\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^3}=t^2\cdot\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-3}$$ とおく。

$$f'(t)=2t\cdot\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-3}+t^2\cdot(-3)\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-4}\left(2+\frac{2\cdot 2t}{2\sqrt{2t^2+1}}\right)$$

$$=\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-4}\left\{2t\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)-3t^2\left(2+\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)\right\}$$ であり,

$t>0$ のとき $\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-4}>0$ なので 符号変化するのは次の部分である。

$$2t\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)-3t^2\left(2+\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)=2t\left\{\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)-3t\left(1+\frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)\right\}$$

$$=2t\left(1-t+\frac{1-t^2}{\sqrt{2t^2+1}}\right)$$

$$=2t(1-t)\left(1+\frac{1+t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)\quad\cdots③$$

③より $f'(t)$ は $t>0$ において, $t=1$ の前後で負から正へと変化する。

したがって, $t=1$ で最大値をとることがわかる。

よって求める最大値は $8\pi f(1)=8\pi\cdot\dfrac{1^2}{\left(2\cdot 1+1+\sqrt{2\cdot 1^2+1}\right)^3}$

$$=8\pi\cdot\frac{1}{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}$$

$$=8\pi\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3$$

$$=8\pi\cdot\left(\frac{27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3}}{2^3\cdot 3^3}\right)$$

$$=\frac{18-10\sqrt{3}}{9}\pi$$

[東京工業大学 2011 年後期 $\boxed{2}$]

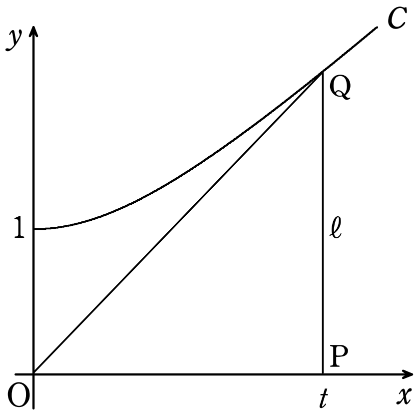
次の式 $x=\tan\theta,\ y=\dfrac{1}{\cos\theta}\ \left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える。

定数 $t>0$ に対し点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線 ℓ と曲線 C の交点を Q とする。

曲線 C，x 軸，y 軸および直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S_1 とし，△OPQ の面積を S_2 とする。

(1) $S_1,\ S_2$ を t を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}$ を求めよ。



(1) $x=\tan\theta,\ y=\dfrac{1}{\cos\theta}$ より $1+x^2=y^2$ であり，

$x=t\,(=\tan\theta)$ のとき $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$y\left(=\dfrac{1}{\cos\theta}\right)>0$ なので $y=\sqrt{1+t^2}$ である。

したがって $S_2=\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}$

また，$\tan\theta=t$ となる θ を α とすれば，$x:0\to t$ に対し $\theta:0\to\alpha$ であり

$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であるから $S_1=\displaystyle\int_0^t y\,dx$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta \quad \text{となる。}$$

ここで，$\dfrac{1}{\cos^3\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\cos^4\theta}=\dfrac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}$ であり，$\theta:0\to\alpha$ に対し $u:0\to\sin\alpha$ であり

$u=\sin\theta$ のとき $du=\cos\theta d\theta$ なので

$$S_1=\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{(1-u^2)^2}du$$

$$=\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)(1-u)}\right\}^2du$$

$$=\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\right\}^2du$$

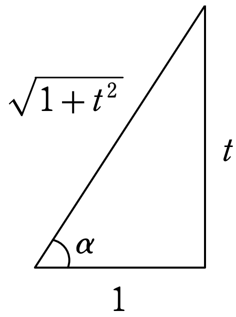
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{2}{(1+u)(1-u)}+\frac{1}{(1-u)^2}\right\}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right\}du$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+u}+\log|1+u|-\log|1-u|+\frac{1}{1-u}\right]_0^{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2u}{1-u^2}+\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\log\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$$ …（＊）となる。



右図より　$\tan\alpha=t$　であるから　$\sin\alpha=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$　であり

（＊）$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}+\log\frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{2t\sqrt{1+t^2}+\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{t\sqrt{1+t^2}+\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\right\}$$　となる。

(2) (1)より $S_1-S_2=\dfrac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\log t+\log\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{t}\right)$$

よって　$$\frac{S_1-S_2}{\log t}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\log t}\cdot\log\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\log t}\cdot\log\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}+1\right)$$　であるから　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}=\frac{1}{2}$