[東京工業大学 2011 年後期 $\boxed{2}$]

☆

次の式 $x=\tan\theta,\ y=\dfrac{1}{\cos\theta}$ $\left(0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ で表される xy 平面上の曲線 C を考える。

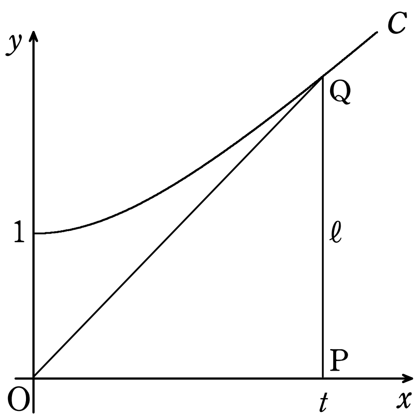
定数 $t>0$ に対し点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線 ℓ と曲線 C の交点を Q とする。

曲線 C，x 軸，y 軸および直線 ℓ で囲まれた図形の面積を S_1 とし，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S_2 とする。

(1) $S_1,\ S_2$ を t を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}$ を求めよ。

☆



(1) $x=\tan\theta,\ y=\dfrac{1}{\cos\theta}$ より $1+x^2=y^2$ であり，

$x=t\,(=\tan\theta)$ のとき $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より

$y\left(=\dfrac{1}{\cos\theta}\right)>0$ なので $y=\sqrt{1+t^2}$ である。

したがって $S_2=\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}t\sqrt{1+t^2}$

また，$\tan\theta=t$ となる θ を α とすれば，$x:0\to t$ に対し $\theta:0\to\alpha$ であり

$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ であるから $S_1=\displaystyle\int_0^t y\,dx$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos^3\theta}d\theta \quad \text{となる。}$$

ここで，$\dfrac{1}{\cos^3\theta}=\dfrac{\cos\theta}{\cos^4\theta}=\dfrac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}$ であり，$\theta:0\to\alpha$ に対し $u:0\to\sin\alpha$ であり

$u=\sin\theta$ のとき $du=\cos\theta d\theta$ なので

$$S_1=\int_0^{\sin\alpha}\frac{1}{(1-u^2)^2}du$$

$$=\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)(1-u)}\right\}^2du$$

$$=\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)\right\}^2du$$

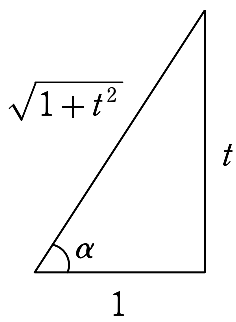
$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{2}{(1+u)(1-u)}+\frac{1}{(1-u)^2}\right\}du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\sin\alpha}\left\{\frac{1}{(1+u)^2}+\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}+\frac{1}{(1-u)^2}\right\}du$$

$$=\frac{1}{4}\left[-\frac{1}{1+u}+\log|1+u|-\log|1-u|+\frac{1}{1-u}\right]_0^{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2u}{1-u^2}+\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^{\sin\alpha}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}+\log\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\right)$$ …（＊）となる。



右図より　$\tan\alpha=t$　であるから　$\sin\alpha=\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$　であり

（＊）$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}+\log\frac{1+\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{2t\sqrt{1+t^2}+\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{t\sqrt{1+t^2}+\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)\right\}$$　となる。

(2) (1)より $S_1-S_2=\dfrac{1}{2}\log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\log t+\log\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{t}\right)$$

よって　$$\frac{S_1-S_2}{\log t}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\log t}\cdot\log\frac{\sqrt{1+t^2}+t}{t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\log t}\cdot\log\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}+1\right)$$　であるから　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_1-S_2}{\log t}=\frac{1}{2}$