[東京工業大学 2011 年後期 $\boxed{1}$]

正の実数 t に対して, 座標空間における 4 点 O(0, 0, 0), A(t, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1) を考える。

このとき，次の問に答えよ。

(1) 四面体 OABC のすべての面に内接する球 P の半径 r を t を用いて表せ。

(2) t が動くとき，球 P の体積を四面体 OABC の体積で割った値の最大値を求めよ。

---

(1) 四面体 OABC の体積 V を 2 通りに表す。

△OAB を底面とする三角錐と考えれば

$$V = \triangle\mathrm{OAB} \times \mathrm{OC} \times \frac{1}{3}$$

$$= 1 \times t \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{t}{6} \quad \cdots①$$

また，球 P の中心を Q として四面体 OABC を 4 つの三角錐に分割すれば，それぞれの三角錐の高さはすべて r になるので

$$V = 四面体\mathrm{QOAB} + 四面体\mathrm{QOBC} + 四面体\mathrm{QOCA} + 四面体\mathrm{QABC}$$

$$= (\triangle\mathrm{OAB} + \triangle\mathrm{OBC} + \triangle\mathrm{OCA} + \triangle\mathrm{OAB}) \times r \times \frac{1}{3}$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} + \frac{t}{2} + \frac{\sqrt{2t^2+1}}{2}\right) \times \frac{r}{3}$$

$$= \left(2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}\right)\frac{r}{6} \quad \cdots②$$

①と②はいずれも球 P の体積を表しているので

$$\left(2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}\right)\frac{r}{6} = \frac{t}{6} \quad より \quad r = \frac{t}{2t + 1 + \sqrt{2t^2+1}}$$

(2) 題意の値は $\dfrac{4}{3}\pi r^3 \div V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{t}{2t+1+\sqrt{2t^2+1}}\right)^3 \times \dfrac{6}{t}$

$$= 8\pi \cdot \frac{t^2}{\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^3} \quad である。$$

$$f(t)=\frac{t^2}{\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^3}=t^2\cdot\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-3}$$ とおく。

$$f'(t)=2t\cdot\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-3}+t^2\cdot(-3)\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-4}\left(2+\frac{2\cdot 2t}{2\sqrt{2t^2+1}}\right)$$

$$=\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-4}\left\{2t\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)-3t^2\left(2+\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)\right\}$$ であり，

$t>0$ のとき $\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)^{-4}>0$ なので 符号変化するのは次の部分である。

$$2t\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)-3t^2\left(2+\frac{2t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)=2t\left\{\left(2t+1+\sqrt{2t^2+1}\right)-3t\left(1+\frac{t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)\right\}$$

$$=2t\left(1-t+\frac{1-t^2}{\sqrt{2t^2+1}}\right)$$

$$=2t(1-t)\left(1+\frac{1+t}{\sqrt{2t^2+1}}\right)\quad\cdots③$$

③より $f'(t)$ は $t>0$ において，$t=1$ の前後で負から正へと変化する。

したがって，$t=1$ で最大値をとることがわかる。

よって求める最大値は $8\pi f(1)=8\pi\cdot\dfrac{1^2}{\left(2\cdot1+1+\sqrt{2\cdot1^2+1}\right)^3}$

$$=8\pi\cdot\frac{1}{\left(3+\sqrt{3}\right)^3}$$

$$=8\pi\cdot\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^3$$

$$=8\pi\cdot\left(\frac{27-27\sqrt{3}+27-3\sqrt{3}}{2^3\cdot3^3}\right)$$

$$=\frac{18-10\sqrt{3}}{9}\pi$$